Trocha historie úvodem

Chceme-li se naučit nějakou část matematiky a chceme-li porozumět jejímu vývoji, musíme se alespoň krátce seznámit s tím, jak vznikly její jednotlivé základní pojmy a jaká byla jejich role ještě před tím, než nabyly zásadního významu. Následující řádky popisují „prehistorii“ trigonometrických řad a mají spíše intuitivní a motivační charakter.

Úvod

Velmi známá a často zmiňovaná práce [26] J. B. Fouriera (1768 – 1830) rozhodně není prvním pramenem, ve kterém se objevila vyjádření funkcí pomocí součtů trigonometrických řad. Takových vyjádření pro jednoduché funkce bylo známo již několik desítek. K jejich odvození byly užívány různé, často poněkud komplikované metody, pro které bylo inspirací analogické zacházení s mocninnými řadami. Takto nalezené výsledky souvisely zpravidla s aplikacemi matematiky ve fyzice, jako např. při zkoumání chvění strun.

Velmi zhruba řečeno, budeme se zabývat řadami funkcí a jejich *konvergencí*. Náš výklad přesto začneme v době, kdy se o konvergenci příliš nedbalo a kdy se o ní ani mnoho nevědělo. Tak např. L. Euler (1707 – 1783) v jedné ze svých prací postupoval takto: Do známého vzorce pro součet geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1\,, \tag{1}$$

dosadil za z výraz $\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$. Úpravou a porovnáním reálných částí obdržel rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos kt + i \sum_{k=0}^{\infty} \sin kt = \frac{1}{(1-\cos t) - i \sin t} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sin t}{2 - 2\cos t} \tag{2}$$

a porovnáním a úpravou reálných částí výrazů na obou stranách této rovnosti dostal rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt = -\frac{1}{2}\,. \tag{3}$$

Čtenář jistě tuší, že dosazení e^{it} za z rozhodně není korektní, neboť $|\,\mathrm{e}^{it}| = 1$, zatímco vzorec (1) platí jen pro $|\,z\,| < 1$. Skutečně, snadno se přesvědčíme, že první řada na levé straně (2) diverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$. To lze ukázat např. takto: Budeme předpokládat, že je splněna v bodě t *nutná* podmínka pro konvergenci řady $\lim_{k\to\infty} \cos kt = 0$. Potom je také $\lim_{k\to\infty} \cos^2 kt = 0$ a snadno zjistíme, že pro $k \to \infty$ odtud plyne jednak

$$\sin^2 kt = 1 - \cos^2 kt \to 1\,, \quad \text{a zároveň} \quad \sin^2 kt = \frac{1 - \cos 2kt}{2} \to \frac{1}{2}\,.$$

Nalezený spor ukazuje, že řada (3) nekonverguje pro *žádné* $t \in \mathbb{R}$.

Pokud však budeme bezstarostně integrovat rovnici (3) „člen po členu“, dostaneme rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = -\frac{t}{2} + C_1 \, ,$$

a z ní dosazením $t = \pi/2$ obdržíme pomocí vzorce pro součet Leibnizovy řady $C_1 = \pi/2$. Dostaneme tak rovnost

$$\frac{\pi - t}{2} = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots \, . \tag{4}$$

Tu nacházíme v Eulerově *Diferenciálním počtu* z r. 1755 (viz [21]), psal o ní však již o rok dříve v dopise Ch. Goldbachovi (1690 – 1764). Původní Eulerovo odvození bylo složitější a lze je nalézt např. v [57]. Odvození, které jsme uvedli, se objevuje později u D. Bernoulli (1700 – 1782) v pracích souvisejících s kmitáním strun z let 1771 – 1773. Bernoulli mj. patrně jako první poukázal na to, že (4) platí pro $t \in (0, 2\pi)$. Postupoval dokonce i dále: násobením každé strany rovnosti (-1) a další integrací „člen po členu“ odvodil vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} = \frac{t^2}{4} - \frac{\pi t}{2} - C_2 \, . \tag{5}$$

Dosazením dvou hodnot $t = \pi/2$ a $t = \pi$ dostal rovnice

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + \cdots = -\frac{3\pi^2}{16} - C_2 \, , \qquad -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots = -\frac{\pi^2}{4} - C_2 \, ,$$

z nichž druhou dělil 4 a porovnal obě pravé strany. Tak obdržel rovnici

$$-C_2 - \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{4} = -\frac{C_2}{4} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{4} \, ,$$

ze které plyne $C_2 = -\pi^2/6$. Dosadíme-li nyní do (5) za C_2 nalezenou hodnotu a položíme $t = 0$, získáme *správný* výsledek [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \, . \tag{6}$$

Povšimněme si ještě vzorců pro výpočet koeficientů v rozvoji funkce v trigonometrickou řadu. Ani ty se neobjevily ve Fourierově práci, k níž se ještě několikrát vrátíme, poprvé. Nyní si jen stručně připomeneme sled, ve kterém nabyly postupně důležité role. Cesta k integrálním vzorcům pro koeficienty řad byla v zásadě dvojí: vyplynuly jednak limitním přechodem z interpolačních vzorců při cestě od přibližných vyjádření k přesným hodnotám (zde vývoj ovlivnili zejména J. L. Lagrange (1736 – 1813) a A. Clairaut (1713 – 1765)), jednak přímou cestou integrace řady člen po členu. Tuto druhou cestu sledovali J. d'Alembert (1717 – 1783) a Euler. D'Alembert dospěl k takovým vyjádřením při studiu rozvojů funkcí $(1 - \cos nt)^{-s}$ r. 1754. Ve stejném roce Clairaut dospěl k představě, že „libovolná“ funkce f, dokonce i taková, kterou nelze vyjádřit algebraicky, se dá rozložit v řadu

$$f(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt \, ,$$

jejíž koeficienty lze určit pomocí vzorců

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v) \cos kv \, \mathrm{d}v \, , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

[1]) Tuto řadu jako první sečetl r. 1736 Euler. V dnešní době existuje mnoho cest, jak součet této řady určit. Některé jsou velmi důmyslné a téměř elementární.

Zde se však dostáváme bez hlubšího pohledu a přesnějšího výkladu zbytečně daleko. Proto historii „předfourierovských“ výzkumů trigonometrických řad uzavřeme. K dalšímu vývoji se podrobným komentářem vrátíme později.

* * *

Uvedenými ukázkami jsme chtěli čtenáři přiblížit, jak bezstarostně se s (trigonometrickými) řadami v 18. století zacházelo. Avšak ani v dalším století se situace dlouho nezlepšovala. A tak ještě r. 1826, čtyři roky po vydání Fourierovy *Analytické teorie tepla* [26] napsal N. H. Abel (1802 – 1829) v dopise z Paříže svému bývalému učiteli: *Divergentní řady jsou ďábelským výmyslem a je ostudné zakládat na nich jakýkoli důkaz. Pomocí nich lze odvodit jakýkoli potřebný závěr, proto vedly k tolika klamným výsledkům a paradoxům. Stal jsem se k tomu všemu abnormálně pozorným, protože s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je na tom nejdivnější.*

I když budeme výklad často doprovázet historickými poznámkami a příklady, nebudeme postupovat chronologicky. Pokud se čtenář zajímá hlouběji o historii, snadno se v literatuře dostane k systematičtějšímu historickému výkladu; tato knížka by ho v tom měla povzbudit. Spolu s A. Weilem (1906 – 1998) věřím, že s otázkou *Proč historie matematiky?* je takřka neoddělitelně spjata otázka *Proč matematika?* a že tuto otázku není třeba potenciálnímu čtenáři knížky zodpovídat, neboť jinak by patrně tuto knížku ani neotevřel.

Je tu ale ještě jeden silný důvod: málokterá část matematiky ovlivnila vývoj ostatních matematických disciplin více než právě *Fourierovy řady.* Na půdě jejich studia vznikla jemnější kriteria konvergence řad, daly podnět pro vytvoření Riemannova a částečně i Lebesgueova integrálu i pro vznik Cantorovy teorie množin. Tento výčet zdaleka není úplný, nyní jde spíše jen o ilustrativní příklady. Podrobněji je tento vývoj popsán v Dodatku. A tak řada zdánlivě cizorodých poznatků a metod, známých čtenáři odjinud, které nám budou pomáhat při studiu teorie Fourierových řad, spíše naopak vděčí těmto řadám za svůj vznik nebo rozvoj.

Zmiňujeme-li se o tvůrcích jednotlivých pojmů či vět, zdaleka nejde o otázku zásluh nebo priorit. Jednotlivé osobnosti, jakkoli jsou jejich výsledky a práce významné, nejsou tím, nač by se měl čtenář při četbě tohoto textu soustředit. Jeho posláním je pokusit se přiblížit čtenáři jednu z nejkrásnějších partií klasické matematiky. Pokud při jeho četbě získá nejen pár základních matematických poznatků a pochopí složitost celkového vývoje matematiky a její role v kulturní historii lidstva, bude tím jeho hlavní cíl naplněn.

Kapitola 1

Co budeme potřebovat

V této kapitole připomínáme některé poznatky, které v dalším výkladu potřebujeme. Vyspělejšímu čtenáři bude stačit patrně jen náhled na její jednotlivé části a v případě potřeby se může k některé její části vrátit. Vše kromě výkladu tvrzení o stejnoměrné aproximaci je zcela standardní.

1.1 Přípravné úvahy

Z dále užívaných poznatků uvádím podrobněji pouze ty, které považuji za důležité, jde spíše jen o některé úmluvy a stabilizaci označení.

Symboly $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ budeme po řadě užívat k označení oborů všech přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel, přičemž $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Budeme předpokládat, že čtenář je již seznámen s některými matematickými poznatky, probíranými v základních kurzech matematické analýzy. Tak např. základní pojmy a tvrzení o metrických prostorech a (normovaných) lineárních prostorech budeme považovat za známé. K připomenutí stačí nahlédnout do vhodného učebního textu, např. do [69].

Patrně nejsložitějšími z používaných budou poznatky o stejnoměrné spojitosti, stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí, a o základních vlastnostech integrálů. Uspořádání látky je voleno tak, aby její podstatná část byla srozumitelná s pouhou znalostí integrálu z omezené spojité funkce na omezeném intervalu, avšak k pochopení celé látky je znalost Lebesgueova integrálu nutná.

1.2 Komplexní čísla a funkce

Budeme užívat běžná standardní označení. Reálnou a imaginární část komplexního čísla z budeme značit $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$; číslo komplexně sdružené k z značíme $\overline{z}$. Analogické označení používáme i pro funkce. Ve značné části textu budeme pracovat s funkcemi reálné proměnné, avšak mocninné řady uvažujeme vždy v komplexním oboru a předpokládáme, že čtenář zná jejich základní vlastnosti. Zejména připomínáme Moivrův vzorec

$$\mathrm{e}^{ikt} = \cos kt + i \sin kt\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{1.1}$$

který může méně sběhlý čtenář považovat pro případ $k = 1$ též za definici e^{it}. Zřejmě je $\left|\mathrm{e}^{it}\right| = 1$. Jestliže vyjadřujeme $z \neq 0$ v goniometrickém tvaru $z = r\mathrm{e}^{it}$, je $r > 0$ a t je reálné číslo. Všechna t s touto vlastností jsou prvky množiny $\operatorname{Arg} z$ a rozdíl každých dvou prvků této množiny je celočíselný násobek čísla 2π. Funkce e^{it} proměnné t je na $\mathbb{R}$ nekonečněkrát diferencovatelná 2π-periodická funkce.

Často se budeme zabývat stejnoměrnou nebo lokálně stejnoměrnou konvergencí na množině A, pro které budeme užívat označení $\rightrightarrows$ a podobně $\rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$. Ve druhém případě musíme mít samozřejmě k dispozici možnost definovat okolí bodů množiny A. Pro ε-okolí bodu z budeme užívat označení $U(z,\varepsilon)$. Připomeňme, že použitím Borelovy pokrývací věty snadno dokážeme, že lokálně stejnoměrná konvergence na lokálně kompaktním metrickém prostoru P (a tedy např. na $\mathbb{C}$) je ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí na všech kompaktních podmnožinách P; proto bývá též někdy nazývána kompaktní konvergence.

Nutnou a postačující podmínku pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ popisuje následující tvrzení, označované běžně jako Bolzano-Cauchyho podmínka:

Lemma 1.2.1 (Cauchy 1853, Weierstrass 1861). *Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině A, právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(\forall x \in A)(|\, f_m(x) - f_n(x)\,| < \varepsilon)\,. \tag{1.2}$$

Nejjednodušším, avšak velmi důležitým kritériem pro stejnoměrnou konvergenci *řad* funkcí je tzv. Weierstrassův M-test:

Tvrzení 1.2.2 (Weierstrass). *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ je řada funkcí definovaných na množině A a nechť $\sup\{|f_k(t)|;\, t \in A\} \leq M_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Jestliže platí $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$, potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na A.*

Připomeňme, že toto kritérium stejnoměrné konvergence je důsledkem Bolzano-Cauchyho kritéria a odhadu, ve kterém pro $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, levá strana následující nerovnosti konverguje pro $p \to \infty$ k 0:

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} f_k(t)\Big| \leq \sum_{k=p}^{q} |f_k(t)| \leq \sum_{k=p}^{q} |M_k|\,.$$

M-test se uplatňuje mj. i při studiu mocninných řad. Jejich nejdůležitější vlastnosti shrneme do jediného tvrzení:

Tvrzení 1.2.3. *Ke každé mocninné řadě s (komplexními) koeficienty c_k o středu $z_0 = 0$ tvaru*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{1.3}$$

existuje její poloměr konvergence R, $0 \leq R \leq +\infty$, tak, že platí

(a) *jestliže je $R > 0$, potom v každém bodě z konvergenčního kruhu, tj. množiny $U(0,R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < R\}$, řada* (1.3) *konverguje absolutně a v $U(0,R)$ lokálně stejnoměrně k nekonečně diferencovatelné funkci*;

(b) *v každém bodě $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U(0,R)}$ řada* (1.3) *diverguje*;

(c) *pokud je $R \in (0,\infty)$, v každém bodě ζ konvergenční kružnice*

$$K(0,R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = R\}$$

nastane právě jedna ze tří možností: buď řada (1.3) *konverguje v ζ absolutně a pak konverguje stejnoměrně v $K(0,R)$ a tato konvergence je ve všech bodech $K(0,R)$ absolutní, nebo konverguje v bodě ζ neabsolutně, nebo v něm diverguje. V těchto posledních dvou případech nastává v kterémkoli z ostatních bodů kružnice $K(0,R)$ vždy jeden ze dvou případů: řada v něm konverguje neabsolutně nebo diverguje.*

Stejnoměrná konvergence je též nástrojem, který umožňuje záměnu limitních procesů; přitom tyto limity mohou být „schovány“ např. v derivování či integraci apod. Princip je popsán v následujícím tvrzení.

Věta 1.2.4 (Moore 1900, Osgood 1897). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $x_0 \in I$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (komplexních) funkcí definovaných na množině $P = I \setminus \{x_0\}$. Jestliže platí*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *na* P,

(2) $f_n(x) \to a_n$ *pro* $x \to x_0$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$,

potom existují (vlastní) limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Důkaz. K $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq k$, $m, n \in \mathbb{N}$, platí

$$x \in P \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,,$$

a tedy, po limitním přechodu $x \to x_0$, rovněž $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Odtud dostáváme konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$. Položme $\lim a_n = a$. Zřejmě platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|\,.$$

Nyní lze volbou $n \in \mathbb{N}$ dosáhnout toho, že první a třetí člen na pravé straně nerovnosti je odhadnut pro všechna $x \in P$ pomocí $\varepsilon/3$. Potom zvolíme $\delta > 0$ tak, že pro prstencové δ-okolí bodu x_0 v P platí

$$(x \in P_\delta) \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \varepsilon/3\,,$$

z čehož už lehce obdržíme dokazované tvrzení. □

Důsledek 1.2.5. *Nechť existuje $\delta > 0$ a bod $c \in \mathbb{R}$ tak, že*

(1) $f_n(x) \to f_n(c)$ *pro* $x \to c_-$, *tj.* f_n *jsou zleva spojité v bodě* c,

(2) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $(c - \delta, c)$.

Potom je také f zleva spojitá v bodě c a $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c)$; přitom konvergence f_n k funkci f je stejnoměrná na $(c - \delta, c]$.

Budeme potřebovat i „jemnější“ kritéria konvergence, která mají základ v jednoduchém, dnes standardním triku, pocházejícím od N. H. Abela (1802 – 1829). Tato kritéria nám umožní zkoumat i neabsolutní konvergenci řad. Jejich použití bývá složitější, v mnoha případech je však nezbytné. Připomeneme proto Abelovu parciální sumaci podrobněji.

Lemma 1.2.6 (Abel 1826). *Nechť jsou dány posloupnosti komplexních čísel $\{u_k\}_{k=0}^\infty$, $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ a čísla $p, q \in \mathbb{Z}$, $-1 \leq p < q$. Označme s_n částečné součty $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$, $n \in \mathbb{N}_0$, a položme $s_{-1} = 0$. Potom platí*

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p+1}^{q} s_k(u_k - u_{k+1}) + s_q u_{q+1} - s_p u_{p+1}\,. \tag{1.4}$$

Důkaz. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ zřejmě platí:

$$u_k v_k = u_k(s_k - s_{k-1}) = s_k(u_k - u_{k+1}) + s_k u_{k+1} - s_{k-1} u_k \tag{1.5}$$

Všechny tyto nerovnosti pro $k = p+1, \ldots, q$ sečteme a s ohledem na „teleskopičnost“ součtu je

$$\begin{aligned}(s_{p+1}u_{p+2} - s_p u_{p+1}) + (s_{p+2}u_{p+3} - s_{p+1}u_{p+2}) + \cdots + (s_q u_{q+1} - s_{q-1}u_q) =\\ = s_q u_{q+1} - s_p u_{p+1}\,.\end{aligned}$$

Odtud obdržíme jednoduchou úpravou vzorec (1.4). □

Speciálně dostaneme pro nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel $\{u_k\}$ a řadu $\sum v_k$, pro jejíž částečné součty s_n platí $|s_n| \le M$, odhad

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k\Big| \le M(u_{p+1} - u_{q+1}) + M u_{q+1} + M u_{p+1} \le 2M u_{p+1}\,. \tag{1.6}$$

Poznamenejme, že z (1.6) plyne i analogický odhad zbytku řady po p-tém členu, který budeme později ještě potřebovat:

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{\infty} u_k v_k\Big| \le 2M u_{p+1}\,. \tag{1.7}$$

Tvrzení 1.2.7 (Abel, Dirichlet). *Nechť $\{u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ je monotonní posloupnost (reálných) funkcí a nechť $s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(t)$ značí n-tý částečný součet řady (komplexních) funkcí na množině A. Potom řada funkcí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k(t) \tag{1.8}$$

konverguje stejnoměrně na A, je-li splněna kterákoli z následujících podmínek:

(a) *(Abel) : řada $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)$ konverguje stejnoměrně na množině A a posloupnost $\{u_k(t)\}$ je stejně omezená na A, tj. existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $t \in A$ je*

$$|u_k(t)| \le K\,.$$

(b) *(Dirichlet) : posloupnost $\{u_k(t)\}$ je nerostoucí a konverguje stejnoměrně na množině A k 0 a řada $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)$ má stejně omezené částečné součty na A, tj. existuje $M > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $t \in A$ je*

$$|s_n(t)| \le M\,.$$

Důkaz. V obou případech stačí ověřit Bolzano-Cauchyho podmínku pro stejnoměrnou konvergenci řady (1.8). Nejprve to uděláme pro druhou z obou podmínek (Dirichletova podmínka); podle předpokladů k $\varepsilon > 0$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $s > p$ je $0 \le u_s(t) \le \varepsilon/2M$. Potom podle (1.6) platí pro všechna $q > p$ a všechna $t \in A$

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} u_k(t) v_k(t)\Big| \le 2M u_{p+1}(t) \le \varepsilon\,,$$

což dokazuje stejnoměrnou konvergenci řady (1.8) na množině A pomocí Dirichletovy podmínky.

Nyní dokážeme stejnoměrnou konvergenci řady (1.8) na A pomocí Abelovy podmínky. Z předpokladů vyplývá, že existuje $\lim_{k\to\infty} u_k(t) = u(t)$ a že platí $|u(t)| \le K$ pro všechna $t \in A$. Snadno nahlédneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} u(t) v_k(t)$ konverguje stejnoměrně na A. Stačí tedy dokázat stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(u_k(t) - u(t)\big) v_k(t)\,.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že posloupnost funkcí $c_k = (u_k - u)$ je neklesající, jinak přejdeme k posloupnosti funkcí $-c_k$. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ zřejmě platí $|\,c_k\,| \le 2K$. Ze stejnoměrné konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)$ vyplývá, že k $\varepsilon > 0$ lze zvolit $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $q > p$ a všechna $t \in A$ je $\left|\sum_{k=p+1}^{q} v_k(t)\right| \leq \varepsilon/2K$. Pak však podle (1.6) snadno dostaneme odhad

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} c_k(t)v_k(t)\Big| \leq (\varepsilon/2K)\, c_{p+1}(t) \leq \varepsilon\,;$$

tím je důkaz celého tvrzení dokončen. □

Již v úvodní kapitole jsme se seznámili s tím, že dříve se počítalo i s divergentními řadami. Zhruba po r. 1821 došlo vlivem Cauchyho k zásadnímu útlumu zájmu o divergentní řady. K jeho obnovení přispěly práce E. Cesàra (1859 – 1906) o násobení řad a v neposlední řadě studium konvergence Fourierových řad spojitých funkcí. S příslušnými výsledky, publikovanými r. 1904 v [23] L. Fejérem (1880 – 1959), se čtenář bude mít možnost v tomto textu seznámit.

1.3 Divergentní řady

Ukažme na jednom příkladu, jak se s divergentními řadami zacházelo a jak představy o sčítatelnosti postupně krystalizovaly. Číselná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{1.9}$$

zřejmě diverguje. Rozpaky a zmatek vzbuzovaly úvahy typu

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1\,. \end{aligned}$$

Některé z nich vedou k nějakému „součtu“ s, který se z různých důvodů zdál „rozumný“. Např. při dosazení $z = -1$ do vzorce pro součet geometrické řady

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

dostaneme $s = 1/2$. Označíme-li symbolem s předpokládaný součet této řady, je

$$s = (1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - (1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - s\,,$$

což dává stejný výsledek; jiné úvahy pravděpodobnostního charakteru, které vedly k témuž „součtu“, prezentoval např. G. W. Leibniz (1646 – 1716). Viz též příklady v knize [28].

L. Euler, který byl v manipulaci s řadami skutečným mistrem, věřil, že každá řada má za „součet“ hodnotu takové funkce, z jejíhož rozvoje v mocninnou řadu vznikne číselná řada dosazením, bez ohledu na to zda dosazujeme body z kruhu konvergence či z doplňku jeho uzávěru. Své přesvědčení vyjadřoval těmito slovy: „*(...) každá řada musí mít určitou hodnotu. Abychom se vyrovnali se všemi při tom vznikajícími obtížemi, neměla by se tato hodnota nazývat součet. K tomuto označení se váže jeho chápání jakožto výsledku skutečného sčítání, což není možné u divergentních řad.*“ Na jiném místě píše: „*součet každé řady je hodnotou toho konečného výrazu, jehož rozvinutím příslušná řada vzniká*“ (1745). Toto je často nazýváno *Eulerův princip*.

Při zkoumání operací, které měly „zrychlovat“ konvergenci řad (poznamenejme, že pro svoji pomalou konvergenci se např. Leibnizova řada o součtu $\pi/4$ k výpočtu π vůbec nehodí), dospěl Euler i k metodě, kterou lze popsat takto: Je-li dána řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, utvoříme čísla b_k,

$$b_0 = a_0\,, \quad b_k = a_0 + \binom{k}{1}a_1 + \binom{k}{2}a_2 + \cdots + \binom{k}{k}a_k\,,$$

a za jakýsi zobecněný součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ považujeme hodnotu

$$\frac{1}{2}\,b_0 + \frac{1}{4}\,b_1 + \frac{1}{8}\,b_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}\,,$$

pokud ovšem řada v předcházející rovnosti vpravo konverguje. Metoda vychází z představy, že v mocninné řadě $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hodnotě $x = 1$ odpovídá při transformaci

$$x = \frac{y}{1-y}\,, \qquad \text{resp.} \qquad y = \frac{x}{1+x}$$

hodnota $y = 1/2$. Dnes tento postup označujeme jako (E,1)-sčítací metodu.

Jakkoli se to může zdát začátečníkovi absurdní, je někdy potřeba pracovat i s divergentními řadami. V takovém případě se často užívají *sčítací metody*. Jsou to postupy, které *rozšiřují* pojem součtu řady v následujícím smyslu: pokud řada konverguje k součtu s, přiřazují jí jako „nový součet“ totéž číslo s; taková sčítací metoda se nazývá *regulární*. Pokud se sčítací metodou zachovává součet řady s i v případě $s = \pm\infty$, nazývá se taková metoda *silně regulární*. Patrně nejznámější sčítací metodou je *metoda aritmetických průměrů*, založená na následujícím jednoduchém tvrzení:

Lemma 1.3.1. *Nechť je posloupnost (komplexních) čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ konvergentní a platí* $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, *pak také*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_k}{k+1} = a\,.$$

Důkaz. Stačí dokázat, že pro $z_k = (a_k - a)$ platí: Jestliže $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$, pak $\lim_{k\to\infty}(z_0 + z_1 + \cdots + z_k)/(k+1) = 0$. K $\varepsilon > 0$ najdeme $m \in \mathbb{N}$ tak, že $|z_k| < \varepsilon$ pro všechna $k \geq m$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$ je pak

$$\left|\frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_k}{k+1}\right| \leq \left|\frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_m}{k+1}\right| + \left|\frac{z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_k}{k+1}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|z_0| + |z_1| + \cdots + |z_m|}{k+1} + \frac{\varepsilon(k-m)}{k+1}\,.$$

Nyní snadno najdeme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ tak, aby pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k > m$, byl první ze zlomků v předcházející nerovnosti na pravé straně menší než ε; tím jsme odhadli průměr vlevo pro všechna $k \geq m$ hodnotou 2ε, čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Jestliže uplatníme přechod k posloupnosti průměrů na posloupnost částečných součtů řady, pak jejich limita je rovna součtu řady, pokud řada konverguje. Popsaný postup tedy dává regulární sčítací metodu. Ta skutečně netriviálně zobecňuje „normální součet“, protože takto sečteme i divergentní řadu $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$. Abychom sčítání pomocí sčítacích metod odlišili od součtu řady, připojujeme před znamení sumy nějaký znak. Popsaná metoda je pojmenována po Cesàrovi, proto užíváme znak (C)–$\sum$. Snadno zjistíme, že

$$(C)\text{–}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \frac{1}{2}\,.$$

Jinou sčítací metodu obdržíme prostřednictvím chování mocninné řady, která konverguje na konvergenční kružnici. Konverguje-li mocninná řada (1.3) v bodě konvergenční kružnice $\zeta = Re^{i\vartheta}$, kde $R \in (0,\infty)$ a $\vartheta \in \mathbb{R}$, je součet f řady (1.3) spojitou funkcí vzhledem k úsečce spojující body 0 a ζ. Na tom je založena *Abelova sčítací metoda*, neboť důsledkem zmíněné spojitosti je regularita této metody. Platí totiž tvrzení:

Věta 1.3.2 (Abel 1826). *Nechť $\zeta \neq 0$ a řada $\sum a_n\zeta^n$ konverguje. Jestliže označíme $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, pak pro $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\lim_{x\to 1-} f(x\zeta) = f(\zeta)\,.$$

Důkaz. Je-li $\zeta = R\mathrm{e}^{i\varphi}$, lze násobením celé řady faktorem $R\mathrm{e}^{-i\varphi}$ převést obecný případ na případ $\zeta = 1$. Potom $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(1)$ a stačí dokázat spojitost f pro $x \in \mathbb{R}$ v bodě 1 zleva. Ta vyplývá ze spojitosti částečných součtů s_n řady a ze stejnoměrné konvergence řady na úsečce $(0,1\,]$ užitím Důsledku 1.2.5. Nyní již stačí dokázat stejnoměrnost konvergence s_n k f. Volbou $v_k(t) = a_k$ dostaneme řadu konstantních funkcí $\sum v_k$ stejnoměrně konvergentní na $(0,1\,]$, zatímco $u_k(t) = t^n$, $t \in (0,1\,]$ je nerostoucí posloupnost stejně omezených funkcí; proto podle Abelovy podmínky z Věty 1.2.7 řada konverguje k funkci f, která je spojitá vzhledem k intervalu $(0,1\,]$. $\square$

Poznámka 1.3.3. Předcházející tvrzení je zajímavé v případě, kdy řada v bodě ζ *konverguje neabsolutně*, tj. leží-li bod ζ na konvergenční kružnici mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Při absolutní konvergenci jeho význam klesá, protože pak je f spojitá vzhledem k uzávěru kruhu $U(0,R)$. Pro sčítací metodu je podstatné, že příslušná limita může existovat i v případě, že řada $\sum a_n\zeta^n$ diverguje. Pro označení zobecněného součtu obdrženého touto metodou užíváme označení (A)–$\sum$.

Poznamenejme na závěr, že dnes existují sčítací metody, pomocí kterých lze „téměř“ úvodní Eulerovy představy o „součtu“ mocninné řady realizovat: Velmi zhruba řečeno, mocninná řada lze sečíst k hodnotě funkce, pomocí níž je definována, v tzv. Mittag-Löfferově hvězdě, ne však všude v $\mathbb{C}$, kde je tato funkce konečná.

1.4 Integrace

První hlubší poznatky o integrálu jsou těsně spjaty s teorií Fourierových a trigonometrických řad. V době, ze které pocházejí první poznatky o (bodové) konvergenci Fourierových řad, byl k dispozici prakticky pouze integrál z funkce spojité na omezeném uzavřeném intervalu a zacházelo se s ním v mnoha směrech spíše intuitivně než na podkladě rozvinuté teorie.

Vznik rozvinutější teorie je spojen s jménem B. Riemanna (1826 – 1866), který v práci [61], věnované trigonometrickým řadám, tzv. *Riemannův integrál* definoval. Již Weierstrass si uvědomoval, že tento integrál je nedostačující, avšak k dalšímu mezníku dospěl r. 1903 na základě mnoha dílčích výsledků H. L. Lebesgue (1875 – 1941). Jím zavedený *Lebesgueův integrál* je dnes nepostradatelným nástrojem každého matematika. Některé základní poznatky o těchto integrálech připomeneme.

Riemann byl první, kdo zkoumal systém všech funkcí, pro které má běžná jím užívaná *součtová definice* integrálu $\int_a^b f$ smysl. Není obtížné dokázat existenci Riemannova integrálu z každé funkce f spojité na intervalu $[\,a,b\,]$ (využívá se stejnoměrná spojitost f). Užívá se jednoduché nutné a postačující podmínky: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ intervalu $[\,a,b\,]$, pro které je rozdíl mezi horním součtem $S(f,D)$ a dolním součtem $s(f,D)$ libovolně malý. Označíme-li

$$m_k = \inf\{f(t)\,;\, t \in [\,t_k, t_{k-1}\,]\}\,,\quad M_k = \sup\{f(t)\,;\, t \in [\,t_k, t_{k-1}\,]\}\,,$$

a χ_k charakteristickou funkci intervalu (t_{k-1}, t_k), pak jsou funkce

$$g_D(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k\chi_k(t)\,,\quad G_D(t) = \sum_{k=1}^{n} M_k\chi_k(t),\quad t \in [\,a,b\,] \setminus D$$

definovány všude až na konečnou množinu D a jejich (Riemannovy) integrály jsou rovny právě součtům $s(f,D)$ a $S(f,D)$. V bodech množiny D existují jednostranné limity obou těchto funkcí; rozšíříme-li g_D v těchto bodech menší z jednostranných limit v tomto bodě a G_D analogicky větší z těchto limit, hodnoty integrálů se nezmění a platí

$$g_D \le f \le G_D \quad \text{a} \quad \int_a^b g_D \le \int_a^b f \le \int_a^b G_D \,.$$

Takové funkce f, pro které lze $[\,a,b\,]$ rozložit na *konečný počet* disjunktních intervalů, na kterých je f konstantní, nazýváme *po částech konstantní.* Není obtížné nahlédnout, že popsaným postupem lze sestrojit posloupnost funkcí $\{g_k\}$, které jsou po částech konstantní, s vlastností $g_k \rightrightarrows f$ na $[\,a,b\,]$. Zřejmě pak platí i $\int_a^b g_k \to \int_a^b f$, a také

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |\,g_k - f\,| = 0\,. \tag{1.10}$$

Obecněji, pro riemannovsky integrovatelnou funkci $f \in \mathcal{R}([\,a,b\,])$, lze sestrojit analogicky posloupnost $\{g_k\}$ po částech konstantních funkcí tak, že opět platí (1.10). S těmito vlastnostmi Riemannova integrálu vystačíme.

Obraťme se nyní k Lebesgueovu integrálu. Množina všech (lebesgueovsky) měřitelných funkcí definovaných (skoro všude) na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^m$, pro něž je konečný integrál

$$\int_M |f(v)|^p \,\mathrm{d}\mu\,(v)\,, \tag{1.11}$$

značíme $\mathcal{L}^p(M)$. Tato množina je s obvyklými úmluvami o operacích (součet prvků $\mathcal{L}^p(M)$ i jejich násobky jsou definovány skoro všude na M a jsou to prvky $\mathcal{L}^p(M)$) a o třídách funkcí, které jsou si rovny skoro všude na M, normovaným lineárním prostorem, definujeme-li na něm normu pomocí

$$\|f\|_p = \Big(\int_M |f(v)|^p \,\mathrm{d}\mu\,(v)\Big)^{1/p}\,. \tag{1.12}$$

Prostor $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^m)$ tvoří hustou podmnožinu v prostorech $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m)$. Platí totiž toto tvrzení:

Věta 1.4.1. *Je-li f reálná funkce z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nebo obecněji z $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, pak existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ taková spojitá funkce g s kompaktním nosičem, že je*

$$\|f-g\|_p = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f-g|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} < \varepsilon\,.$$

Uvedená aproximační věta patří ke standardním tvrzením, které se v teorii integrálu probírají; srv. [62], Věta 3.14 [1]).

Prostor $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ všech (tříd) lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^m$ lze interpretovat jako zúplnění prostoru $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^m)$; z tohoto zorného úhlu se jeví tvrzení předcházející věty jako velmi přirozené.

Trochu podrobněji pro jednorozměrný případ: Je-li $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ systém všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, které mají kompaktní nosič, lze systém $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ interpretovat jako zúplnění metrického prostoru $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ v metrice

$$\rho(f,g) = \int |\,f(t) - g(t)\,|\,\mathrm{d}t\ ,$$

[1]) Pokud čtenář nezná tuto větu, může zvážit její vztah k Luzinově větě.

kde integrujeme přes libovolný kompaktní interval, který obsahuje oba nosiče funkcí f, g. Toto zároveň ukazuje jednu z mnoha cest, pomocí nichž se dá Lebesgueův integrál na $\mathbb{R}^1$ zavést. Podotýkáme, že se budeme dále výhradně zabývat Lebesgueovým integrálem vzhledem k „jednorozměrné“ Lebesgueově míře.

Podrobně je tato partie zpracována např. v [62] nebo v jiných textech věnovaných teorii míry a integrálu. Předpokládáme, že čtenář je s touto látkou obeznámen.

1.5 Prostory funkcí

Připomeňme dále některá tvrzení o metrických prostorech a o normovaných lineárních prostorech. Je-li K kompaktní metrický prostor, tvoří systém všech (reálných nebo komplexních) funkcí spojitých na K lineární prostor, který budeme značit $\mathcal{C}(K)$. Definujeme-li pro $f \in \mathcal{C}(K)$ obvyklým způsobem „supremovou“ normu

$$\|f\| := \sup\{\, |f(t)|\,;\, t \in K\}\,, \tag{1.13}$$

je prostor $\mathcal{C}(K)$ vzhledem k této normě *úplný* a je tedy Banachovým prostorem. Každá funkce $f \in \mathcal{C}(K)$ je na K omezená a je na K také stejnoměrně spojitá, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x, y \in K$, jejichž vzdálenost je menší než δ, platí

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Je-li funkce f reálná, nabývá na K své nejmenší a největší hodnoty.

V předcházející části připomenuté normované lineární prostory $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m)$ jsou jedním z často užívaných matematických nástrojů; my je nejvíce budeme potřebovat pro případ $p = 1$, kdy se horní index zpravidla vynechává a píše se stručněji pouze $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$

Systém všech *spojitých* komplexních nebo reálných 2π-periodických funkcí na $\mathbb{R}$ budeme značit $\mathcal{C}(2\pi)$; je to zřejmě lineární prostor. Pokud to situace bude vyžadovat, výslovně upozorníme na to, že pracujeme pouze s reálnými funkcemi. Normu na tomto prostoru definujeme vzorcem

$$\|f\|: \, = \sup\{|f(t)|\,; t \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f(t)|\,; t \in [\,0, 2\pi\,]\}.$$

Je zřejmé, že supremum lze brát vzhledem k libovolnému intervalu o délce alespoň 2π. Podobně budeme v případě potřeby užívat označení $\mathcal{R}(2\pi)$ pro prostor 2π-periodických funkcí, které jsou lokálně *riemannovsky* integrovatelné na $\mathbb{R}$.

Dále budeme užívat označení $\mathcal{L}^p(2\pi)$ pro systém všech (lebesgueovsky) měřitelných 2π-periodických funkcí f lokálně integrovatelných na $\mathbb{R}$. Pro ně pak definujeme pro $1 \le p < \infty$ normu

$$\|f\|_p = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \Big)^{1/p}. \tag{1.14}$$

Prostor (tříd) funkcí, který značíme $\mathcal{L}^p(2\pi)$, je *úplný* vzhledem k normě, zavedené v (1.14). Toto tvrzení platí pro všechna $p \in [\,1, \infty)$. Podrobněji opět viz [62].

Jsou-li X, Y normované lineární prostory, pak je lineární zobrazení $L\colon X \to Y$ spojité, právě když je číslo

$$\|L\| := \sup\{\|Lx\|_Y\,;\, \|x\|_X \le 1\}$$

konečné. Jak napovídá užité označení, lze takto definovat na prostoru všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y normu, čímž opět vznikne normovaný lineární prostor. Snadno se dokáže, že pak je

$$\|L\| = \sup\{\|Lx\|\,;\, \|x\| < 1\} = \sup\{\|Lx\|\,;\, \|x\| = 1\} = \sup\{\|Lx\|/\|x\|\,; x \ne 0\}\,.$$

Zobrazení T obecného prostoru X do prostoru Y nazýváme často operátor. Jsou-li to např. prostory *reálných* funkcí a pro T z $f \geq 0$ vyplývá $Tf \geq 0$, pak říkáme, že operátor T je nezáporný (pojem je možno zavést i za obecnější situace).

Pokud jsou X a Y navíc lineární prostory, pak z nezápornosti omezeného lineárního operátoru $T\colon X \to Y$ vyplývá jeho monotonie, tj. pro $f, g \in X$, $f \leq g$, platí též $Tf \leq Tg$. Jestliže totiž pro $f, g \in X$ platí $f \leq g$, pak $g - f \geq 0$, takže je i $Tg - Tf = T(g - f) \geq 0$ a tvrzení platí. Za stejných předpokladů lze dokázat, že pro každou funkci $f \in X$ a každé $y \in Y$ je

$$|Tf(y)| \leq (T(|f|))(y)\,. \tag{1.15}$$

K tomu stačí následující úvaha: libovolně zvolenou $f \in X$ vyjádříme jako rozdíl kladné a záporné části, tj. $f = f^+ - f^-$. Z monotonie T dostaneme

$$Tf = Tf^+ - Tf^- \leq Tf^+ + Tf^- = T(f^+ + f^-) = T(|f|)\,.$$

Podobnou úvahou pro $-f$ dostaneme $-Tf = T(-f) \leq T(|f|)$, z čehož již snadno obdržíme $|Tf| = \sup\{Tf, -Tf\} \leq T(|f|)$; tím je nerovnost (1.15) dokázána.

Budeme též potřebovat jednoduchou variantu tvrzení, kterému se zpravidla říká princip stejnoměrné omezenosti. Je jedním ze základních tvrzení lineární funkcionální analýzy. K jeho důkazu budeme potřebovat jednu variantu Baireovy věty, kterou pouze připomeneme:

Věta 1.5.1 (Baire 1899). *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $\{G_k\}$ je posloupnost otevřených podmnožin prostoru P hustých v P. Potom je průnik $G := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ hustou podmnožinou P.*

Důkaz stručně připomeneme. Stačí dokázat, že pro libovolně zvolenou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset P$ existuje $\zeta \in G \cap U$. Induktivně se sestrojí posloupnost *uzavřených* koulí $K_n \subset \bigcup_{k=1}^{n}(G_k \cap U)$ tak, že $\{K_n\}$ je neklesající posloupnost uzavřených množin s průměry $\operatorname{diam}(K_n) \to 0$. Průnikem množin této posloupnosti je podle Cantorovy věty jednobodová množina $\{\zeta\}$; podrobněji viz [62], s. 113 nebo [27], s. 76.

Poznámka 1.5.2. Ač je následující věta téměř výhradně spojována se jmény S. Banach a H. Steinhaus, objevil ji H. L. Lebesgue r. 1908 v souvislosti se studiem Fourierových řad. Banach a Steinhaus si uvědomili možnost jejího použití v daleko obecnějším kontextu. Jindy bývá nazývána (Banach-Steinhausův) *princip stejnoměrné omezenosti.* Ukazuje, že za určitých předpokladů „bodová omezenost“ lineárních funkcionálů dává stejnoměrnou omezenost jejich norem.

Označení 1.5.3. Je-li X normovaný lineární prostor, pak lineární prostor všech spojitých lineárních funkcionálů f na X, na kterém definujeme normu

$$\|f\| = \sup\{\, x \in X \; \|x\|_X x \leq 1\} \tag{1.16}$$

značíme X^*. Tento prostor X^* nazýváme duální prostor k X.

Věta 1.5.4 (Banach, Steinhaus 1927*). *Nechť X je Banachův prostor (tedy úplný normovaný lineární prostor). Nechť $L_n \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, Potom nastává právě jedna ze dvou možností:*

(a) *existuje $M < \infty$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\|L_n\|_{X^*} < M$, nebo*
(b) *množina $\{x \in X; \sup_n |L_n(x)| = \infty\}$ je množinou typu G_δ a je hustá v X.*

Důkaz Věty 1.5.1. Použijeme Baireovu větu. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ položme

$$S_m = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X\,;\, |\,L_n x\,| \leq m\}\,.$$

Protože L_n jsou spojité, je S_m průnikem (spočetného) systému uzavřených množin; množiny S_m jsou proto uzavřené. Jejich doplňky $G_m = X \setminus S_m$ jsou otevřené množiny. Platí

$$X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} (X \setminus S_m) = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \,,$$

a podle Baireovy věty nastane jedna ze dvou možností. Jestliže jsou všechny množiny G_m husté, je i jejich průnik podle Baireovy věty hustá množina v X a nastane případ (b).

Pokud tento případ nenastane, alespoň jedna z množin $G_m = X \setminus S_m$ není hustá, a tedy nějaká z množin S_m je „někde hustá“. Existují proto $x_0 \in X$, $r > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ taková, že je

$$B(x_0, r) \subset S_k \,.$$

Zvolme libovolně nenulový prvek $x \in X$ a položme

$$z = x_0 + \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \,.$$

Je tedy $\|x_0 - z\| = r/2 < r$, a proto

$$|L_n z| < k \quad \text{pro všechna} \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$|L_n z| = \left| L_n\Big(x_0 + \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|}\Big) \right| = \left| L_n x_0 + \frac{r}{2\|x\|} L_n x \right| < k \,.$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti odtud dostáváme

$$|L_n x| (r/2\|x\|) - |L_n x_0| \le k \,,$$

a po úpravě obdržíme odhad

$$|L_n x| \le \|x\| (2/r)(k + |L_n x_0|) \le (4k/r) \|x\| \,.$$

Odhad platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in X$, čímž je důkaz dokončen. ☐

1.6 Funkce s konečnou variací

Systém monotónních funkcí na intervalu $[\,a, b\,]$ má jistou vadu: netvoří lineární prostor. Existuje však jednoduchá pomoc, budeme pracovat s prostorem, který všechny monotónní funkce obsahuje a je přitom mimořádně jednoduchý.

Definice 1.6.1. Nechť $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$. Pro komplexní funkci f definovanou na $[\,a, b\,]$ a dělení $D = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ intervalu $[\,a, b\,]$ klademe

$$V(f, D) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \,.$$

Variací nebo *totální variací* funkce f na intervalu $[\,a, b\,]$ nazýváme číslo (ne nutně z $\mathbb{R}$, hodnota ∞ se připouští)

$$V_a^b f = \sup \big\{ V(f, D) \,;\; D \in \mathcal{D}([\,a, b\,]) \big\} \,,$$

kde $\mathcal{D}([a, b])$ je množina všech dělení D intervalu $[\,a, b\,]$. Je-li $V_a^b f < \infty$, říkáme, že f má *konečnou variaci* na $[\,a, b\,]$. Množinu všech funkcí s konečnou variací na $[\,a, b\,]$ značíme $\mathrm{BV}([\,a, b\,])$.

Zřejmě je $V_a^b f \geq 0$. Doplňme ještě definici pro degenerovaný interval typu $[a, a]$: v tom případě klademe $V_a^a f = 0$. Standardní technika práce s děleními a supremem dává následující tvrzení:

Lemma 1.6.2. *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$, *nechť* f, g *jsou komplexní funkce na* $[a, b]$ *a* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Potom*

(a) $V_a^b (f + g) \leq V_a^b f + V_a^b g$,

(b) $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$,

(c) $V_a^b (\alpha f) = |\alpha| V_a^b f$.

Důkaz. Protože podobné úvahy se provádějí např. v souvislosti s Riemannovým integrálem, důkaz pouze naznačíme. Je-li $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ dělení intervalu $[a, b]$, platí pro jeho intervaly dělení

$$\big|\big(f(x_k)+g(x_k)\big)-\big(f(x_{k-1})+g(x_{k-1})\big)\big| \leq \big|f(x_k)-f(x_{k-1})\big|+\big|g(x_k)-g(x_{k-1})\big|,$$

z čehož po sečtení a přechodu k supremu na pravé straně dostaneme

$$V(f + g, D) \leq V_a^b f + V_a^b g.$$

Dalším přechodem k supremu na levé straně dostaneme (a). Podobně (srovnejte s větami o Riemannově integrálu) se prací s děleními obsahujícími bod c dostane rovnost (b): Zvolme dělení $D = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ a ukažme, že je

$$V(f, D) \leq V_a^c f + V_c^b f;$$

můžeme bez na újmy obecnosti předpokládat, že $\{c\} \subset D$, protože z platnosti předchozí nerovnosti pro zjemnění $\{c\} \cup D$ plyne jeho platnost i pro D. Položme dále $D \cap [a, c] = D_1$, $D \cap [c, b] = D_2$. Zřejmě

$$V(f, D) = V(f, D_1) + V(f, D_2) \leq V_a^c f + V_c^b f,$$

z čehož obdržíme

$$V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f.$$

K důkazu obrácené nerovnosti zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a dělení $D_1 \in \mathcal{D}([a, c])$, $D_2 \in \mathcal{D}([c, b])$ tak, aby

$$V(f, D_1) > V_a^c f - \varepsilon/2, \quad V(f, D_2) > V_c^b f - \varepsilon/2,$$

takže pro $D = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \} = D_1 \cup D_2$ dostaneme

$$V_a^b f \geq V(f, D) = V(f, D_1) + V(f, D_2) > V_a^c f - \varepsilon/2 + V_c^b f - \varepsilon/2,$$

a tudíž i

$$V_a^b f \geq V_a^c f + V_c^b f;$$

tím jsme dokončili důkaz části (b). Část tvrzení označená (c) je zřejmá. □

Důsledek 1.6.3. *Systém* $\mathrm{BV}([a, b])$ *tvoří vektorový prostor obsahující funkce monotónní na intervalu* $[a, b]$. *Lze na něm zavést normu např.*

$$\|f\| := |f(a)| + V_a^b f \tag{1.17}$$

Definice 1.6.4. Pro funkci $f \in \mathrm{BV}([a, b])$ zavedeme její *neurčitou variaci* (užíváme historický název, který není příliš šťastně zvolen) vzorcem

$$g(x) := V_a^x f, \quad x \in [a, b].$$

Věta 1.6.5 (Jordan 1881). *Funkce f je prvkem prostoru* $\mathrm{BV}([a,b])$*, právě když existují* neklesající funkce $f_j : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$*,* $j = 1,2,3,4$ *takové, že*

$$f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)\,. \tag{1.18}$$

Důkaz. Neklesající funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci $V_a^b f = f(b) - f(a)$; proto stačí, s ohledem na předešlé tvrzení, nalézt pouze rozklad $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ do tvaru (1.18) s funkcemi $f_j \geq 0$ neklesajícími na $[\,a,b\,]$.

Předpokládejme nejprve, že f je *reálná funkce* z $\mathrm{BV}([\,a,b\,])$ a že g je její neurčitá variace. Zřejmě je $g(b) < \infty$ a pro $a \leq x < y \leq b$ platí

$$0 \leq g(x) \leq g(x) + V_x^y f = g(y) \leq g(b)\,,$$

takže g je nezáporná a neklesající na $[\,a,b\,]$. Položme $h = g - f$. Potom pro $a \leq x < y \leq b$ platí

$$h(y) - h(x) = g(y) - g(x) - (f(y) - f(x)) \geq V_x^y f - |f(y) - f(x)| \geq 0$$

čímž je pro reálnou funkci f tvrzení dokázáno. Rozkladem na reálnou a imaginární část dostaneme tvrzení pro komplexní funkci f. □

Poznámka 1.6.6. Důsledkem věty o existenci jednostranných limit funkce monotónní na $[a,b]$ ve všech bodech $x \in [\,a,b\,]$ je, že pro každou funkci $f \in \mathrm{BV}([\,a,b\,])$ existují i jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$ ve všech vnitřních bodech $x \in (a,b)$. Přitom množina bodů nespojitosti funkce f je (nejvýše) spočetná.

Položíme-li

$$\begin{aligned} t(x) &:= f(x+) - f(x)\,, \quad x \in [\,a,b)\,,\\ s(x) &:= f(x) - f(x-)\,, \quad x \in (a,b\,]\,, \end{aligned}$$

lze definovat

$$S(x) := \sum_{a \leq \alpha < x} t(\alpha) + \sum_{a < \alpha < x} s(\alpha) \tag{1.19}$$

a rozložit funkci $f \in BV([\,a,b\,])$ na součet

$$f(x) := C(x) + S(x)\,,$$

kde C je spojitá funkce s konečnou variací a S je funkce skoků, která má spočetnou množinu bodů nespojitosti [2]).

1.7 Weierstrassova věta o aproximaci

Tvrzení o stejnoměrné aproximaci spojité funkce na intervalu $[\,a,b\,]$ polynomy je velmi důležité. O jeho historii a různých metodách jeho důkazu se lze poučit v [70] nebo v obsažnějším článku [59]. Weierstrassova věta je dokázána jiným způsobem např. v [69].

Nejprve dokážeme speciální případ Weierstrassovy věty o aproximaci *reálné* spojité funkce f na intervalu $[\,0,1\,]$. Použitý důkaz je založen na myšlence, pocházející od S. N. Bernsteina (1880–1968). Ten definoval pro $f \in [\,0,1\,]$ aproximující (Bernsteinovy) polynomy [3]) $B_n f$:

$$B_n f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,, \quad x \in [\,0,1\,]\,. \tag{1.20}$$

Budeme potřebovat toto pomocné tvrzení:

[2]) Všechny nespojitosti funkce S jsou navíc nespojitostmi 1. druhu. Čtenáře, který se nesetkal se zobecněnými řadami, odkazujeme např. na [35]

[3]) Užíváme obvyklé transkripce; jde však o ruského, resp. sovětského matematika, a v takových případech transkripce v literatuře značně kolísá.

Lemma 1.7.1. *Nechť $f_k(t) = t^k$, $t \in [0,1]$, pro $k = 0,1,2$. Potom Bernsteinovy polynomy $B_n f_k$ konvergují pro $n \to \infty$ k f_k stejnoměrně na intervalu $[0,1]$.*

Důkaz. Rovnost $B_n f_0 = f_0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ plyne z binomické věty. Uvažme dále, že pro $1 \le k \le n$ je

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}. \tag{1.21}$$

Dosazením f_1 do (1.20) dostaneme pomocí rovnosti (1.21)

$$\begin{aligned} B_n f_1(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x \cdot 1 = f_1(x)\,, \quad x \in [0,1]\,, \end{aligned}$$

takže platí $B_n f_1 = f_1$. Konečně pomocí (1.21) spočteme pro $1 \le k \le n$

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}; \tag{1.22}$$

první člen posledního součtu pro $2 \le k \le n$ ještě upravíme:

$$\frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n}\,\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2}. \tag{1.23}$$

Po dosazení f_2 do (1.20) obdržíme pro všechna $x \in [0,1]$

$$B_n f_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

a pomocí (1.22) a (1.23) jednoduchou úpravou postupně dostaneme

$$\begin{aligned} B_n f_2(x) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{(n-2)-j} + \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2(x) + \frac{1}{n} f_1(x)\,; \end{aligned}$$

Odtud plyne $B_n f_2 \rightrightarrows f_2$ na $[0,1]$. ☐

Nyní již můžeme dokázat slíbený speciální případ Weierstrassovy věty:

Věta 1.7.2 (Bernstein 1912). *Pro každou $f \in \mathcal{C}([0,1])$ platí*

$$B_n f \rightrightarrows f \ \text{ na } [0,1]\,.$$

Důkaz. Snadno nahlédneme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ platí (používáme postupů z Lemmatu 1.7.1)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + x^2 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x - 2x \cdot x + x^2 = \frac{x\,(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n}\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Nechť nyní je $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $x \in [\,0,1\,]$. Označme $F = F_x$ množinu všech takových $k \in \{1, 2, \dots , n\}$, pro něž $|(k/n) - x| \ge \delta$ a použijme předcházející odhad (1.24). Potom postupně dostaneme

$$\sum_{k\in F} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{\delta^2} \sum_{k\in F} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\delta^2}\,. \tag{1.25}$$

Je-li nyní $f \in \mathcal{C}([\,0,1\,])$ a $\varepsilon > 0$, pak ze stejnoměrné spojitosti funkce f na intervalu $[\,0,1\,]$ plyne existence takového $\delta > 0$, pro které $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, jakmile $x, y \in [\,0,1\,]$, $|x - y| < \delta$. Připomeňme, že s ohledem na důkaz Lemmatu 1.7.1 pro f_0 platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [\,0,1\,]$

$$\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\Big| = \Big| \sum_{k=0}^{n} \Big(f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\Big| \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{n} \Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\,.$$

Zvolme libovolně $x \in [\,0,1\,]$ a označme $F = F_x$ množinu zavedenou v předchozím odstavci. Potom

$$\Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad k \notin F\,, \quad \text{a} \quad \Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \le 2\,\|f\|\,, \quad k \in F\,.$$

Odtud dostaneme odhad

$$\big| f(x) - B_n f(x)\big| \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\notin F} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + 2\,\|f\| \sum_{k\in F} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 + 2\,\|f\|\cdot \frac{1}{4n\delta^2}\,,$$

ze kterého již vyplývá, že pro $n > \|f\|/\varepsilon\delta^2$ je $|f(x) - B_n f(x)| \le \varepsilon$, a proto je $\|\,B_n f - f\,\| \le \varepsilon$. ☐

Poznámka 1.7.3. Tento relativně elementární důkaz je modifikací důkazu, který předložil r. 1912 v [7] Bernstein. Lemma 1.7.1 lze interpretovat „pravděpodobnostně“: Jde v něm o binomické rozdělení a rovnosti

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx\,, \quad \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

dávají jeho *střední hodnotu* a *rozptyl*. Na tomto místě není vůbec zřejmé, proč nelze místo polynomů $B_n f$ volit interpolační polynomy, nabývající v bodech k/n, $k = 0, \dots , n$, stejných hodnot jako f. Avšak právě Bernstein ukázal, že např. pro funkci $f(x) = |x|$ a interval $[\,-1,1\,]$ tak dostaneme posloupnost polynomů, která k f konverguje *pouze* ve třech bodech $-1, 0, 1$.

Nyní ukážeme, jak ze zdánlivě velmi speciálního znění Weierstrassovy věty pro interval $[\,0,1\,]$ dostaneme její obvyklou verzi:

Věta 1.7.4 (Weierstrass, 1885). *Pro každou komplexní funkci $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ existuje posloupnost polynomů $\{P_n\}$ taková, že $\|\,f - P_n\,\| \to 0$ pro $n \to \infty$; funkce f je tedy limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti polynomů.*

Důkaz. Popíšeme nyní jednotlivá zjednodušení, umožňující obdržet Větu 1.7.4 z již dokázané Věty 1.7.2.

(a) Je-li f komplexní funkce na intervalu $[\,a,b\,]$, $f = f_1 + if_2$, kde

$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)\,, \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)\,, \quad x \in [\,a,b\,]\,,$$

a g_1, g_2 jsou reálné funkce na $[a,b]$ pro něž $|f_k - g_k| < \varepsilon$, $k = 1,2$, pak

$$\|(f_1 + if_2) - (g_1 + ig_2)\| \le \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2} \le \sqrt{2} \cdot \varepsilon < 2\varepsilon\,.$$

Funkce $g := g_1 + ig_2$ je (obecně komplexní) funkce, přičemž $\|f - g\| < 2\varepsilon$.

(b) Jsou-li g_1, g_2 polynomy s reálnými koeficienty, je $g_1 + ig_2$ opět polynom s komplexními koeficienty. Z uvedených dvou postřehů plyne, že stačí tvrzení stačí dokázat pro reálné spojité funkce a polynomy s koeficienty z $\mathbb{R}$.

(c) Je-li $f \in \mathcal{C}([a,b])$, je

$$g(t) := f\Big(a + \frac{b-a}{d-c}(t-c)\Big)\,, \quad t \in [c,d]\,,$$

spojitá funkce na intervalu $[c,d]$. Jestliže je P takový polynom, pro který platí $|g(t) - P(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in [c,d]$, potom pro funkci

$$Q(x) = P\Big(c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)\Big)\,, \quad x \in [a,b]\,,$$

je

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon\,, \quad x \in [a,b]\,.$$

Přitom $Q(x) = P(c + (x-a)(d-c)/(b-a))$ je opět polynom v x.

Stačí tedy tvrzení dokázat pouze pro nějaký interval $[a,b]$. To jsme však již udělali pro interval $[0,1]$ ve Větě 1.7.2. ☐

1.8 Korovkinova věta

Weierstrassova věta má v teorii aproximace výlučné postavení. Uveďme citát z dnes již klasické učebnice [33]: *Pokud by bylo nutné označit jedinou větu v teorii aproximace jako důležitější než všechny ostatní, byla by to pravděpodobně Weierstrassova věta o aproximaci. Její vliv je pociťován nejen užíváním jistého nástroje analýzy, ale i mnohem hloubějším způsobem: slouží jako lákadlo pro matematiky, aby ji zobecňovali nebo hledali jiné její důkazy* (Cheney (1966)). I samotný Bernsteinův důkaz věty posloužil jako odrazový můstek k dalším elegantním výsledkům.

Následující elegantní tvrzení pochází od P. P. Korovkina (1913 – 1985) a bývá v literatuře nazýváno *věta o třech funkcích*:

Věta 1.8.1 (Korovkin (1953)). *Jsou-li L_n, $n \in \mathbb{N}$, monotónní lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$, pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:*

(a) $L_n f \rightrightarrows f$ *na* $[0,1]$ *pro všechny funkce* $f \in \mathcal{C}([0,1])$,
(b) $L_n f_j \rightrightarrows f_j$ *na* $[0,1]$ *pro funkce* $f_j(x) = x^j$, $x \in [0,1]$, $j = 0,1,2$.

Dokážeme jisté zobecnění této věty (srv. [53]), které nám umožní snadný přístup k dalším důležitým tvrzením. Nejdříve však připomeneme potřebné pojmy a zavedeme některá označení.

Označení 1.8.2. Nechť X značí kompaktní metrický prostor a $\mathcal{C}(X)$ Banachův prostor spojitých reálných funkcí na X se supremovou normou

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\,;\, x \in X\}\,.$$

Pro $u \in \mathcal{C}(X)$ budeme značit $Z(u) := \{\, x \in X\,;\, u(x) = 0\,\}$.

Je-li $L : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ monotónní lineární operátor na $\mathcal{C}(X)$, plyne z nerovnosti $|f(x)| \le g(x)$, $x \in X$ nerovnost $-g(x) \le f(x) \le g(x)$. Z ní dostaneme

$$-Lg(x) \le Lf(x) \le Lg(x)\,,$$

neboli nerovnost („základní odhad")

$$|Lf(x)| \le Lg(x)\,. \tag{1.26}$$

Lemma 1.8.3. *Je-li Y kompaktní metrický prostor a u, v nezáporné funkce z prostoru $\mathcal{C}(Y)$, pro něž je $Z(v) \subset Z(u)$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $C = C(\varepsilon) > 0$, že pro všechna $y \in Y$ je*

$$u(y) \le \varepsilon + C\,v(y)\,. \tag{1.27}$$

Důkaz. Je-li $K := \{\, y \in Y\,;\, u(y) \ge \varepsilon \,\}$, je K uzavřená a tedy kompaktní. Jestliže je $K = \emptyset$, nerovnost (1.27) je zřejmě splněna, můžeme tedy uvažovat pouze případ $K \ne \emptyset$. Pak ale $\min\{v(y)\,;\, y \in K\} = m > 0$ a $\max\{u(y)\,;\, y \in K\} < M < \infty$. Nyní stačí volit $C > 0$ tak, aby bylo $Cm > M$, tj. $C > M/m$. □

Definice 1.8.4. Je-li $f \in \mathcal{C}(X)$, pak definujeme *diagonálu* $\Delta(f)$ funkce f rovností

$$\Delta(f) := \{(x,t) \in X \times X\,;\, f(x) = f(t)\}\,.$$

Je-li h nezáporná funkce z $\mathcal{C}(X \times X)$ taková, že $Z(h) \subset \Delta(f)$, nazývá se h *omezující funkce* pro funkci f.

Je-li L nezáporný lineární operátor na $\mathcal{C}(X)$ a $h \in \mathcal{C}(X \times X)$, definujme pro každé $t \in X$

$$h_t(x) := h(x,t)\,, \quad x \in X\,,$$

a pro h_t položíme $Lh_t(x) := L(h_t)(x)$, $x \in X$. Potom snadno dokážeme tvrzení:

Lemma 1.8.5. *Nechť X je kompaktní metrický prostor a nechť $f \in \mathcal{C}(X)$, přičemž h je omezující funkce pro f. Je-li $L_n : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ posloupnost nezáporných lineárních operátorů na $\mathcal{C}(X)$ taková, že*

(a) $L_n 1 \rightrightarrows 1$ *na X, a*
(b) $L_n h_t(t) \rightrightarrows 0$ *na X,*

potom je $L_n f \rightrightarrows f$ na X.

Důkaz. Nechť pomocná funkce $u \in \mathcal{C}(X \times X)$ je definována předpisem

$$u(x,t) := |f(x) - f(t)|\,, \quad (x,t) \in X \times X\,.$$

Zřejmě je u nezáporná funkce a $Z(u) = \Delta(f)$. Protože je h omezující funkcí pro f, je $Z(h) \subset Z(u)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Lemmatu 1.8.3 najdeme $C > 0$ tak, aby

$$|f(x) - f(t)| = u(x,t) \le \varepsilon + C\,h(x,t)\,, \quad (x,t) \in X \times X\,.$$

Zvolme pevně $t \in X$ a užijme základní odhad (1.26) pro nezáporné operátory L_n; dostaneme tak:

$$|L_n f(x) - f(t) L_n 1(x)| \le \varepsilon L_n\,1(x) + C\,L_n\,h_t(x)\,, \quad x \in X\,.$$

Nyní volíme $x = t$, a pomocí předcházející nerovnosti obdržíme jednoduchou úvahou

$$\begin{aligned} |\,L_n f(t) - f(t)\,| &= |L_n f(t) - f(t)L_n 1(t) + f(t) L_n 1(t) - f(t)| \le \\ &\le |L_n f(t) - f(t) L_n 1(t)| + |f(t)|\,|L_n 1(t) - 1| \le \\ &\le \varepsilon L_n 1(t) + C\,L_n h_t(t) + \|f\|_\infty\,|L_n 1(t) - 1|\,. \end{aligned}$$

Protože $C L_n h_t(t) \rightrightarrows 0$ na X a $\|f\|_\infty\,|L_n 1(t) - 1| \rightrightarrows 0$ na X, lze výraz v poslední nerovnosti vpravo při volbě vhodného $n \in \mathbb{N}$ odhadnout shora např. číslem 4ε, z čehož dostáváme $L_n f \rightrightarrows f$ na X. □

Poznámka 1.8.6. Pro $f, g \in \mathcal{C}(X)$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí inkluze

$$\Delta(f) \cap \Delta(g) \subset \Delta(f+g)\,, \quad \Delta(f) \cup \Delta(g) \subset \Delta(f \cdot g)\,, \quad \Delta(f) \subset \Delta(\alpha f)\,,$$

takže pro každou nezápornou h tvoří systém všech funkcí $f \in \mathcal{C}(X)$, pro které je h omezující funkce, *(pod)algebru* v $\mathcal{C}(X)$. Proto lze podmínku $L_n 1 \rightrightarrows 1$ na X v Lemmatu 1.8.5 eventuálně nahradit podmínkou $L_n 1 \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$.

1.9 Skalární součin

V prostoru $\mathbb{R}^m$ je pro $u = [\,u_1, \dots, u_m\,]$, $v = [\,v_1, \dots, v_m\,]$, definován *skalární součin* předpisem

$$(u, v) := \sum_{k=1}^{m} u_k v_k\,.$$

Tento prostor je úplný a eukleidovská norma na tomto prostoru souvisí s tímto součinem tak, že je $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Pokud pracujeme s m-ticemi komplexních čísel, píšeme v předcházejícím vzorci $\overline{v_k}$ místo v_k.

V případě prostorů $\mathcal{L}^p([\,0, 2\pi\,])$ je pro nás velmi důležitý případ $p = 2$. I v tomto případě je norma generována skalárním součinem, který je pro komplexní funkce definován rovností

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.28}$$

Pak pro odpovídající normu zřejmě platí rovnost $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Funkce f, g, pro které $(f, g) = 0$ nazýváme (vzájemně) *ortogonální.* Důležitý je poznatek, že funkce $u_n(t) = \mathrm{e}^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, jsou na intervalu $[\,-\pi, \pi\,]$ vzájemně ortogonální v následujícím smyslu: pro $m, n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned}(u_m\,, u_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{imt}\,\overline{\mathrm{e}^{int}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + i\sin(m-n)t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & m \neq n\,, \\ 2\pi & m = n\,. \end{cases}\end{aligned} \tag{1.29}$$

Popsaný poznatek stručně vyjadřujeme tvrzením, že funkce $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří *ortogonální systém.*

Podobně lze ukázat, že funkce $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ jsou také vzájemně ortogonální např. na intervalu $[\,0, 2\pi\,]$, což jednoduše vyplývá ze vzorců, známých ze středoškolské látky

$$\begin{aligned} 2\cos a \cdot \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b)\,, \\ 2\cos a \cdot \sin b &= \sin(a+b) - \sin(a-b)\,, \\ -2\sin a \cdot \sin b &= \cos(a+b) - \cos(a-b)\,; \end{aligned} \tag{1.30}$$

z nich obdržíme násobením faktorem $1/2$ a dosazením mt za a a nt za b po úpravě

$$\begin{aligned} \cos mt \cdot \cos nt &= \big(\cos(m+n)t + \cos(m-n)t\big)/2\,, \\ \cos mt \cdot \sin nt &= \big(\sin(m+n)t - \sin(m-n)t\big)/2\,, \\ \sin mt \cdot \sin nt &= \big(\cos(m-n)t - \cos(m+n)t\big)/2\,. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Odtud dostaneme integrací přes interval $[\,0, 2\pi\,]$ většinu vztahů, potřebných pro zdůvodnění ortogonality systému $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$; zbývající jsou triviální.

Kapitola 2

Trigonometrické řady

V této části se seznámíme s terminologií a jednoduchými vztahy, které budeme v dalším výkladu neustále používat. Z teorie integrálu vystačíme zatím prakticky jen s Riemannovým integrálem.

2.1 Základní poznatky

Základním objektem našeho výkladu je *trigonometrická řada*. Je to řada funkcí tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(a_k \cos kx + b_k \sin kx\bigr)\,, \tag{2.1}$$

kde proměnná x probíhá $\mathbb{R}$ a jejíž koeficienty $a_0, a_1, b_1, \ldots$ jsou reálná čísla. Nemá valného smyslu vyšetřovat obecnější případ komplexních koeficientů, vždy lze totiž řadu rozložit na její reálnou a imaginární část a vyšetřovat je odděleně. Obě části jsou řadami typu (2.1) s reálnými koeficienty.

Dosadíme-li do trigonometrické řady za goniometrické funkce vyjádření plynoucí z Eulerových vzorců

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\,, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\,, \tag{2.2}$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2}\,\mathrm{e}^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}\,\mathrm{e}^{-ikx},$$

takže po označení

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,,\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\,,\ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{2.3}$$

lze (2.1) formálně zapsat v „komplexním tvaru“ jako řadu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx}. \tag{2.4}$$

Podle obvyklé definice tato řada *konverguje*, pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}.$$

Jeví se tedy účelné studovat řady typu (2.4) s komplexními koeficienty c_k, $k \in \mathbb{Z}$ a případně z jejich chování odvozovat výsledky pro řady typu (2.1), nebo studovat přímo některé otázky pro řady (2.1) s reálnými koeficienty a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}_0$, $(b_0 = 0)$.

Dále je účelné definovat pro $n \in \mathbb{N}_0$ analogicky jako u polynomů

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \quad \text{resp.} \quad T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}. \tag{2.5}$$

Tyto částečné součty se nazývají *trigonometrické polynomy.* Pro rozlišení někdy, jeví-li se to vhodné, dodáváme v prvním případě *v reálném tvaru* a ve druhém případě *v komplexním tvaru.* Trigonometrický polynom T_n je stupně *nejvýše n-tého.* Jestliže je $|a_n| + |b_n| > 0$, je T_n stupně *právě n-tého* (kromě případu, kdy jsou koeficienty vesměs rovny 0).

Pokud vyjadřujeme polynom typu (2.1) ve tvaru (2.4), platí pro reálné koeficienty a_k, b_k rovnosti

$$a_k = c_k + c_{-k}\,,\ b_k = i(c_k - c_{-k})\,,\ c_{-k} = \overline{c_k}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Poznamenejme ještě, že řada (2.1) je reálnou částí mocninné řady

$$\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k\,,$$

dosadíme-li do ní $z = \mathrm{e}^{ix}$, tj. $z^k = (\cos kx + i \sin kx)$. Toho se často využívá při sčítání konkrétních trigonometrických řad.

Pokud trigonometrická řada konverguje alespoň v jednom bodě z $\mathbb{R}$ (jinak je vyšetřování jejího součtu nezajímavé), je tento součet 2π-periodická funkce. Proto budeme v dalším pracovat nejčastěji s 2π-periodickými funkcemi nebo funkcemi, definovanými na intervalu délky 2π, které si představujeme periodicky rozšířené na $\mathbb{R}$. Trigonometrické polynomy jsou reálné nebo komplexní funkce z $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, periodické s periodou 2π.

Pro (lineární) prostor všech spojitých 2π-periodických funkcí na $\mathbb{R}$ budeme užívat již zavedené označení $\mathcal{C}(2\pi)$. Podobně jsme zavedli (lineární) prostor $\mathcal{L}(2\pi)$ všech (tříd) lokálně lebesgueovsky integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbb{R}$ a (lineární) prostor $\mathcal{R}(2\pi)$ všech lokálně riemannovsky integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbb{R}$. Při použití označení $\subset\subset$ pro označení vztahu být podprostorem zřejmě platí

$$\mathcal{C}(2\pi) \subset\subset \mathcal{R}(2\pi) \subset\subset \mathcal{L}(2\pi)\,.$$

Prostor $\mathcal{L}(2\pi)$ uvažujeme vždy s integrální normou, tj. pro $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ klademe

$$\|f\| = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.7}$$

zatímco na prostorech $\mathcal{C}(2\pi)$ nebo $\mathcal{R}(2\pi)$ můžeme kromě takto definované normy užívat též normu supremovou. V případě potřeby na to však vždy upozorníme.

Příklad 2.1.1. Protože je (používáme elementární poznatky z teorie funkcí komplexní proměnné)

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

pro všechna $z \neq -1$, $|z| \leq 1$, platí pro všechna $t \in (-\pi, \pi)$

$$\log\left(1 + \mathrm{e}^{it}\right) = \log 2\, \frac{\mathrm{e}^{-it/2} + \mathrm{e}^{it/2}}{2}\, \mathrm{e}^{it/2} = \log\left(2 \cos \frac{t}{2}\right) + i\, \frac{t}{2}\,.$$

Odtud vyplývá

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kt}{k} = \cos t - \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 3t}{3} - \cdots = \log\Big(2\cos\frac{t}{2}\Big)\,,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kt}{k} = \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \cdots = \frac{t}{2}\,.$$

Avšak i rozvoj exponenciály (konvergentní v $\mathbb{C}$) může vést k zajímavým výsledkům: můžeme tak nalézt vzorce

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kt}{k!} = \mathrm{e}^{\cos t}\cos(\sin t)\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kt}{k!} = \mathrm{e}^{\cos t}\sin(\sin t)\,.$$

Příklad 2.1.2. Jak jsme viděli již v úvodní části trigonometrické řady nemusí konvergovat pro žádné $t \in \mathbb{R}$. Vskutku, z následujících dvou řad

$$\sum_{k=0}^{\infty}\cos kt\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sin kt$$

první diverguje ve všech bodech z $\mathbb{R}$, protože pro žádné $t \in \mathbb{R}$ *neplatí* $\cos kt \to 0$.

Vyšetřeme ještě druhou řadu: pokud pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ je $\sin kt \to 0$, pak také

$$\sin(k+1)t - \sin(k-1)t = 2\sin t\cos kt \to 0\,.$$

Protože však $\{\cos kt\}_{k=0}^{\infty}$ nekonverguje pro žádné $t \in \mathbb{R}$, musí tedy být $\sin t = 0$, tj. $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech však řada zřejmě konverguje k 0.

Jestliže trigonometrická řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikt}. \tag{2.8}$$

konverguje *stejnoměrně* k součtu f, je tato funkce limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti trigonometrických polynomů a je tedy spojitá. K její integraci přes libovolný uzavřený interval $[\,a,b\,] \subset \mathbb{R}$ postačí užití Newtonova nebo Riemannova integrálu. To je třeba mít na paměti: tvrzení formulujeme vždy pro Lebesgueův integrál a je na čtenáři, aby si uvědomil, za jaké situace vystačíme se „slabším“ Riemannovým integrálem.

Odvodíme jednoduchý vztah mezi funkcí f a koeficienty trigonometrické řady. V Kapitole 1 jsme ukázali, že definujeme-li skalární součin (komplexních) funkcí f, g na intervalu $[\,-\pi,\pi\,]$ pomocí vzorce

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.9}$$

platí (1.29) a funkce $u_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ jsou na intervalu $[\,-\pi,\pi\,]$ vzájemně ortogonální. Zvolme $m \in \mathbb{Z}$ a pro řadu (2.8) spočtěme součin (f,e^{imx}). Je

$$(f,\mathrm{e}^{imx}) = \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{ikx}, \mathrm{e}^{-imx}\Big) = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{i(k-m)x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(k-m)x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathrm{e}^{ikx},\mathrm{e}^{imx}) = 2\pi c_m\,,$$

z čehož dostaneme vzorec pro výpočet koeficientů pomocí součtu f

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.10}$$

Stejnoměrná konvergence řady (2.8) nám umožnila *zaměnit pořadí integrace a sčítání řady*, a tak integrovat „člen po členu“. S ohledem na (2.9) jsme tak získali explicitní vyjádření koeficientů c_m pomocí f vzorcem (2.10). To nás vede k následující definici:

Definice 2.1.3. Je-li $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a čísla c_m jsou pro funkci f a $m \in \mathbb{Z}$ definována vzorcem (2.10), nazýváme c_m *koeficienty Fourierovy řady funkce* f *(v komplexním tvaru)*. Často je pak značíme symbolem $\widehat{f}(m)$. Jsou-li v trigonometrické řadě (2.8) definovány pro $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ koeficienty c_m pomocí vzorce (2.10), nazýváme ji *Fourierovou řadou funkce* f a píšeme

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{ikt}. \tag{2.11}$$

Podobným způsobem lze postupovat přímo při studiu řady v trigonometrickém tvaru. Pomocí rovností (1.31) snadno zjistíme, že funkce $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ jsou ortogonální na intervalu $[-\pi, \pi]$. Je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \,\mathrm{d}x = \pi\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

a pokud řada konverguje stejnoměrně a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2.12}$$

lze vyjádřit analogicky a_k a b_k vzorci

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \,\mathrm{d}x\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{2.13}$$

Speciálně dostáváme po dosazení za f s ohledem na ortogonalitu

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,1\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cdot 1\,\mathrm{d}x = \pi a_0\,,$$

což vysvětluje výhodu zápisu Fourierovy řady ve tvaru (2.12), neboť pak vzorec (2.13) pro a_k platí i pro $k = 0$.

Definice 2.1.4. Je-li $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a čísla a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, b_k, $k \in \mathbb{N}$, jsou pro funkci f definována vzorcem (2.13), nazýváme a_k, b_k *koeficienty Fourierovy řady funkce* f *(v reálném tvaru)*. Obvykle je ze souvislosti patrné, s jakým tvarem Fourierovy řady pracujeme, proto koeficienty nazýváme stručněji *Fourierovy koeficienty.*

Poznámka 2.1.5. V dalším se budeme zabývat převážně řadami výše popsaných tvarů; je proto na místě si povšimnout, zda to nepřináší do našich úvah nějaká nepřirozená omezení.

Jestliže je lokálně integrovatelná funkce f $2p$-periodická s $p > 0$, nic podstatného se nemění. Např. v „reálném případě" jsou koeficienty Fourierovy řady f definovány pro příslušná k vzorci

$$a_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{k\pi x}{p}\,\mathrm{d}x\,, \quad b_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{k\pi x}{p}\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.14}$$

a Fourierova řada má pak tvar

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi t}{p} + b_k \sin\frac{k\pi t}{p}\right). \tag{2.15}$$

Posunutím se $2p$-periodicita funkce nemění, tj. je-li funkce f $2p$-periodická a $a \in \mathbb{R}$, je $2p$-periodická i funkce

$$g(t) = f(t + a)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Jde-li nám o (lokální) chování periodické funkce f, lze posunutím dosáhnout např. toho, že studujeme chování „posunuté“ funkce v počátku.

K definici Fourierovy řady $2p$-periodické funkce f stačí znát hodnoty f pouze na intervalu $[-p,p]$ a pokud řada konverguje, je její součet $2p$-periodická funkce. Je proto pohodlné pracovat vždy s $2p$-periodickými funkcemi a případně funkci, která je definována *pouze* na intervalu $(-p,p]$ nahradit jejím $2p$-periodickým rozšířením na $\mathbb{R}$. Ve zřejmém smyslu analogicky pracujeme s funkcemi z $\mathcal{C}(2p)$, nebo z $\mathcal{L}(2p)$.

Následující lemma ukazuje, že integrál $2p$-periodické funkce přes jakýkoli interval délky $2p$ dává stejný výsledek. Toho budeme dále využívat. Zacházíme-li pouze se spojitými funkcemi, vyplývá to jednoduše ze vztahu (derivujeme primitivní funkci k f)

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+2p} f(v)\,\mathrm{d}v = f(x+2p)-f(x)=0\,.$$

Obecnější případ je důsledkem tvrzení:

Lemma 2.1.6. *Je-li $f\in\mathcal{L}(2p)$, potom pro reálná čísla $a<b$ a $n\in\mathbb{Z}$ platí rovnosti*

$$\int_a^b f(v)\,\mathrm{d}v = \int_{a+2np}^{b+2np} f(v)\,\mathrm{d}v\,, \qquad \int_{-p}^{p} f(v)\,\mathrm{d}v = \int_a^{a+2p} f(v)\,\mathrm{d}v\,.$$

Důkaz. Je-li $f\in\mathcal{L}(2p)$, pak pro každá $a,b\in\mathbb{R}$ a každé $n\in\mathbb{Z}$ platí vzhledem k periodicitě f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+2np}^{b+2np} f(x-2np)\,\mathrm{d}x = \int_{a+2np}^{b+2np} f(v)\,\mathrm{d}v\,.$$

Zvolme nyní libovolně $a\in\mathbb{R}$ a v již dokázané rovnosti položme $n=1$ a za a dosaďme $a-2p$ a za b dosaďme a. Tak dostaneme druhou rovnost. □

Předcházející lemma se mj. uplatňuje při výpočtu Fourierových koeficientů 2π-periodické funkce $f\in\mathcal{C}(2\pi)$, kde můžeme pracovat s Riemannovým integrálem.

Jedno důrazné upozornění: máme-li Fourierovu řadu funkce $f\in\mathcal{L}(2\pi)$, pak symbol $\approx$ ve vztahu

$$f(t)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(a_k\cos kt+b_k\sin kt\bigr)\,.$$

vyjadřuje *pouze to*, že c_k, resp. a_k a b_k jsou určeny pomocí vzorců (2.10) a (2.13) a je obecně „velice daleko“ od rovnosti pro všechna $t\in\mathbb{R}$. Prozradíme již nyní, že r. 1926 dokázal A. N. Kolmogorov (1903 – 1987), že existuje taková funkce $f\in\mathcal{L}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada *diverguje* pro všechna $t\in\mathbb{R}$. Zatím pouze víme, že rovnost platí např. pro takové funkce $f\in\mathcal{C}(2\pi)$, jejichž Fourierova řada *konverguje stejnoměrně.*

Poznámka 2.1.7. Uvedeme ještě malý komentář k označení: Někdy se hodí 2π-periodické funkce interpretovat jako funkce na jednotkové kružnici $\mathcal{K}\subset\mathbb{C}$. Je-li F funkce na $\mathcal{K}$, pak funkce $f(t)=F(\mathrm{e}^{it})$, $t\in\mathbb{R}$, je 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$. Poznamenáváme, že při přechodu od f k F definujeme F na $\mathcal{K}$ tak, že klademe $F(z)=f(t)$, kde $z=\mathrm{e}^{it}$. Zde můžeme brát např. $t\in(-\pi,\pi]$, tj. $t=\arg z$, nebo obecně $t\in\operatorname{Arg} z$, kde t je jakékoli reálné číslo, pro něž $z=\mathrm{e}^{it}$. Je-li F spojitá na $\mathcal{K}$, je $f\in\mathcal{C}(2\pi)$. Někdy se pak píše $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (volba označení souvisí s termínem *torus*). Funkce f a F se pak často ztotožňují, i když jde o podstatně rozdílné objekty. My budeme pracovat s funkcemi z $\mathcal{C}(2\pi)$ a označení s $\mathbb{T}$ se budeme vyhýbat (bývá interpretováno např. jako libovolný interval délky 2π, např. $[-\pi,\pi]$, nebo $[0,2\pi]$ apod.).

S trigonometrickými a Fourierovými řadami je spojena řada vcelku přirozených otázek, jejichž řešení je někdy lehké, jindy však dosti složité. Na ty nejdůležitější se budeme snažit podat uspokojivé odpovědi.

2.2 Stejnoměrná konvergence

O stejnoměrné konvergenci trigonometrické řady se patrně nejsnáze rozhoduje pomocí Weierstrassova kritéria, pokud je lze použít. Jestliže trigonometrická řada v exponenciálním tvaru (2.8), obecně s komplexními koeficienty c_k, konverguje v nějakém bodě $t \in \mathbb{R}$ absolutně, pak

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| c_k e^{ikt} \right| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left| c_k e^{ikt} \right| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} | c_k | = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k | < \infty .$$

Odtud již plyne jednoduché tvrzení:

Lemma 2.2.1. *Konverguje-li řada* (2.8) *absolutně alespoň v jednom bodě $t \in \mathbb{R}$, konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a je Fourierovou řadou svého součtu.*

Stejně snadno ověříme, že trigonometrická řada v goniometrickém tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(a_k \cos kt + b_k \sin kt\bigr) ,$$

s reálnými koeficienty a_k, b_k, pro kterou je splněna podmínka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bigl(|a_k| + |b_k| \bigr) < \infty , \tag{2.16}$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Při práci s tímto tvarem řady je však situace složitější než v Lemmatu 2.2.1, spokojíme se však pouze s již uvedeným příkladem: řada $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kt$ z Poznámky 2.1.2 absolutně konverguje ve všech bodech $t = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a přesto ve všech ostatních bodech z $\mathbb{R}$ diverguje.

Příklad 2.2.2. Snadno nahlédneme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k!\, x$$

konverguje na husté množině v $\mathbb{R}$: je-li $x = 2\pi p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, potom $\sin k!x = 0$ pro všechna $k \geq q$ a řada konverguje absolutně na množině $2\pi\,\mathbb{Q}$ husté v $\mathbb{R}$. Čtenář nechť si povšimne, že koeficienty této řady nekonvergují k 0. Jak dále ukážeme, taková řada *není Fourierovou řadou* žádné funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$.

Bez důkazu uveďme, že trigonometrická řada (2.12) splňuje podmínku (2.16), jestliže konverguje *absolutně* na množině $M \subset \mathbb{R}$, která má *kladnou* Lebesgueovu míru. Toto tvrzení dokázali r. 1912 A. Denjoy (1884 – 1974) a N. N. Luzin (1883 – 1950). Pro Fourierovy řady platí různá další tvrzení o absolutní konvergenci; srv. [4] a [75].

Pokud by každá Fourierova řada konvergovala stejnoměrně nebo absolutně, bylo by vyšetřování jejich konvergence jednoduché. Zpravidla však vyžaduje nasazení kritérií pro neabsolutní konvergenci: Shrňme na tomto místě, co z Abel-Dirichletova kritéria pro konvergenci Fourierových řad jednoduše vyplývá.

Jestliže $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a tato konvergence je monotónní (bez újmy na obecnosti je-li $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0$, řada konverguje bodově všude s výjimkou bodů $x = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Konvergence je stejnoměrná na každém uzavřeném intervalu I, který neobsahuje body $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Pokud pracujeme se „sinovou řadou“, tj. např. když koeficienty b_n jsou rovny až na konečně mnoho 0, pak tato řada konverguje bodově dokonce všude v $\mathbb{R}$.

Fourierovy koeficienty lze však počítat i pro nespojité funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$. Můžeme pro ně vytvořit jejich Fourierovy řady a zjišťovat, zda vůbec v nějakých bodech konvergují. *Nutnou podmínkou* pro konvergenci řady (2.8) v bodě $t \in \mathbb{R}$ je, aby $c_k e^{ikt} \to 0$ pro $|k| \to \infty$, neboli aby $|c_k| \to 0$ pro $|k| \to \infty$. Ukážeme, že tuto podmínku splňují Fourierovy koeficienty každé funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$. Nejprve však použijeme další omezující předpoklady.

Věta 2.2.3 (Riemann, 1853). *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Potom*

$$\lim_{|x|\to\infty,\, x\in\mathbb{R}} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Důkaz. V průběhu důkazu využijeme některých poznatků z teorie Riemannova integrálu. Je-li $f = \chi_{[a,b]}$ charakteristická funkce intervalu $[a,b]$, pak pro každé $x \neq 0$ platí

$$\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\int_a^b \mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\frac{1}{-ix}\Big(\mathrm{e}^{-ixb} - \mathrm{e}^{-ixa}\Big)\Big| \le \frac{2}{|x|}\,.$$

Odtud tvrzení vyplývá pro tuto konstantní funkci f. Zřejmě také platí pro konečné lineární kombinace takových funkcí, tedy i pro po částech konstantní funkce (snadno nahlédneme, že jak jsou definovány v koncových bodech „intervalů konstantnosti“ nehraje podstatnou roli). Označíme-li pro dělení

$$D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

symbolem χ_k charakteristickou funkci intervalu $I_k = [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$ a χ_n charakteristickou funkci intervalu $I_n = [x_{n-1}, x_n]$, pak při standardním označení

$$m_k = \inf\{f(t)\,;\, t \in I_k\}\,, \quad M_k = \sup\{f(t)\,;\, t \in I_k\}\,,$$

jsou dolní a horní součty pro $f \in \mathcal{R}([a,b])$ rovny integrálům po částech konstantních funkcí $\sum_k m_k\chi_k$, $\sum_k M_k\chi_k$. Nyní snadno nahlédneme, že každou spojitou, či obecněji každou riemannovsky integrovatelnou funkci na intervalu $[a,b]$ lze stejnoměrně aproximovat po částech konstantními funkcemi, a že tvrzení tedy platí pro každou $f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

Důsledek 2.2.4. *Platí* $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$ *pro každou funkci* $f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi])$. *Pro Fourierovu řadu funkce* $f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi])$ *ve tvaru* (2.12) *platí*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0\,.$$

Následující tvrzení je zobecněním předcházejícího; běžně se označuje jako *Riemann-Lebesgueovo lemma* a popisuje Lebesgueovo zobecnění věty dokázané dříve Riemannem.

Věta 2.2.5 (Riemann 1853, Lebesgue 1903). *Nechť $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Potom*

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Důkaz. Větší část práce na tomto důkazu jsme již odvedli při důkazu Věty 2.2.3. V každém případě však nyní musíme využít některých poznatků z teorie integrálu.

Je-li f spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která má kompaktní nosič $\operatorname{spt} f$ (připomeňme, že *nosič funkce* f definujeme jako uzávěr množiny $\{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) \neq 0\}$), potom je $\operatorname{spt} f \subset [a,b]$ pro nějaký interval $[a,b]$ a tvrzení pro ni plyne z již dříve dokázané Věty 2.2.3. Systém všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}$ tvoří lineární prostor $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$. Podle Věty 1.4.1 existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ taková spojitá funkce $g \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$, že

$$\|f - g\|_p = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} < \varepsilon\,;$$

Odtud již platnost dokazované věty snadno vyplyne standardní aproximační technikou. Pro $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ platí

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\Big| &\le \Big|\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - g(t))\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\Big| + \Big|\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t + \Big|\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\Big|\,.\end{aligned}$$

Protože druhý z integrálů na pravé straně poslední nerovnosti pro $|x| \to \infty$ konverguje k 0 a v prvním lze volit g tak, aby první integrál byl odhadnut $\varepsilon/2$, je tvrzení dokázáno pro funkce z $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Rozkladem na reálnou a imaginární část dostaneme důkaz věty i pro „komplexní“ $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. □

2.3 Které jsou vlastně Fourierovy?

Nebudeme se podrobněji zabývat konvergencí trigonometrických řad, v tomto směru se spokojíme pouze s elementárními výsledky. Přirozenou otázkou je, zda každá (všude) konvergentní trigonometrická řada není již Fourierovou řadou. Odpověď je záporná a to nyní dokážeme.

Začneme jednoduchým, avšak důležitým příkladem:

Příklad 2.3.1. Předpokládejme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí a konverguje k 0. Dále nechť je posloupnost $\{kb_k\}$ omezená. Odhadneme pro všechna $t \in \mathbb{R}$ nezávisle na $n \in \mathbb{N}$ částečné součty řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt\,. \tag{2.17}$$

Protože jde o součet periodických lichých funkcí, stačí se místo intervalu $[-\pi,\pi]$ omezit na interval $[0,\pi]$. V krajních bodech 0 a π jsou členy řady vesměs nulové, stačí proto odhadovat pouze pro $0 < t < \pi$.

Předpokládejme, že $|kb_k| < M < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, a zvolme pevně $t \in (0,\pi)$. Označme m celou část $[\pi/t]$. Pro $1 < n \le m$ platí pro částečný součet řady

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt\Big| \le \sum_{k=1}^{n} kb_k t \le Mnt \le M\pi\,.$$

Je-li $n > m$, stačí ještě provést odhad výrazu $\left|\sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin kt\right|$. Ze vzorce (3.13) vyplývá

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} \sin kt\Big| = \Big|\frac{\cos t/2 - \cos(n+1/2)t - \cos t/2 + \cos(m+3/2)t}{2\sin t/2}\Big| =$$

$$= \Big|\frac{-\cos(n+1/2)t + \cos(m+3/2)t}{2\sin t/2}\Big| \le \frac{1}{|\sin(t/2)|}\,,$$

z čehož použitím odhadu (1.6) dostaneme

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin kt\Big| \le \frac{2b_{m+1}}{|\sin t/2|} \le \frac{2(m+1)b_{m+1}\pi}{(m+1)t} \le 2M\,.$$

Z obou odhadů již vyplývá, že řada (2.17) má absolutní hodnoty částečných součtů odhadnuty konstantou $M(\pi+2)$.

Nyní dokážeme ještě jedno poměrně jednoduché tvrzení o Fourierových koeficientech funkcí z $\mathcal{L}(2\pi)$.

Lemma 2.3.2. *Je-li $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a $\{b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, je posloupnost Fourierových koeficientů funkce f určené pomocí* (2.13). *Potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k/k$ konvergentní.*

Důkaz. Položme $g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (\sin kt)/k$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto funkce jsou trigonometrické polynomy a podle Abel-Dirichletova kritéria bodově konvergují k 2π-periodické funkci g. Protože podle Příkladu 2.3.1 existuje $0 < K < \infty$ takové, že je $|g_n| < K$ a $g_n(t)f(t) \to g(t)f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, je $Kf(t)$, $t \in \mathbb{R}$, integrovatelnou majorantou $\{g_n f\}$ a podle Lebesgueovy věty o majorantě

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\,,$$

což jsme měli dokázat. □

Příklad 2.3.3 (důležitý). Trigonometrická řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}\,, \tag{2.18}$$

která konverguje všude v $\mathbb{R}$, je trigonometrickou řadou, která *není* Fourierovou řadou. Podle předcházejícího Lemmatu 2.3.2 by musela být řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k/k$, tj. řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$$

konvergentní. Tato řada však podle integrálního kritéria zřejmě diverguje (a tedy funkce f, která je součtem řady (2.18), není z $\mathcal{L}(2\pi)$).

Je možné, aby trigonometrická řada konvergovala stejnoměrně na $\mathbb{R}$, a přitom nebyla absolutně konvergentní? Ano, to ukazuje následující příklad:

Příklad 2.3.4. Trigonometrická řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \log k}$$

je *stejnoměrně* konvergentní. Podle Lemmatu 2.3.2 jsou totiž částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)/k$ stejně omezené na $\mathbb{R}$ a $1/\log k \to 0$; stejnoměrná konvergence je tedy důsledkem Dirichlet-Abelova kritéria. Kdyby vyšetřovaná řada konvergovala v nějakém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ *absolutně*, tj.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k \log k} < \infty\,,$$

pak by konvergovala i jí majorizovaná řada $\sum_{k=2}^{\infty} (\sin^2 kx)/k \log k$, a tedy i řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 - \cos 2kx}{k \log k}\,.$$

Na množině $\mathbb{R} \setminus \{n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ řada $\sum_{k=2}^{\infty} (\cos 2kx)/k \log k$ konverguje. Odtud však plyne, že by pak musela konvergovat i řada $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k \log k$. Nalezený spor ukazuje, že vyšetřovaná řada nekonverguje absolutně v žádném bodě z $\mathbb{R} \setminus \{n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$.

2.4 Fourierovy řady

Prostý náhled na vzorce (2.10) a (2.13) dává jednoduchý výsledek:

Lemma 2.4.1. *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ platí*

$$\left| \widehat{f}(k) \right| \le \frac{1}{2\pi}\, \|f\|\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Důkaz. Snadno nahlédneme, že platí

$$|\,\widehat{f}(k)\,| \le \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-ikt}\, \mathrm{d}t \right| \le \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\, \|f\|\,,$$

a že zobrazení $f \mapsto \widehat{f}(k)$ zobrazuje $\mathcal{P}(2\pi)$ do prostoru *omezených funkcí* na $\mathbb{Z}$. $\square$

Z již dokázané Věty 2.2.5 dostaneme přesnější informaci. Její jednoduchý důsledek dává základní vlastnost koeficientů Fourierovy řady funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$:

Důsledek 2.4.2. *Pro koeficienty Fourierovy řady funkce* $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ *platí*

$$\widehat{f}(k) \to 0 \quad \text{pro} \quad |k| \to \infty \quad \text{a} \quad a_k \to 0,\; b_k \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty\,.$$

Důkaz. S ohledem na vztahy mezi a_k, b_k a c_k stačí tvrzení zdůvodnit pouze pro $\widehat{f}(k) = c_k$. Pro tento případ je však důsledkem již dokázané Věty 2.2.5. □

Poznámka 2.4.3. Otázka, která trigonometrická řada je Fourierovou řadou, je značně delikátní. Jak je uvedeno v [64], zatímco řada $\sum_{k=2}^{\infty} \sin kt/\log k$ *není* Fourierovou řadou, řada $\sum_{k=2}^{\infty} \cos kt/\log k$ Fourierovou řadou *je.* Již r. 1875 dokázal P. D. G. du Bois-Reymond (1831 – 1889), že je-li součet trigonometrické řady f riemannovsky integrovatelnou funkcí na intervalu $(-\pi, \pi)$, je tato řada Fourierovou řadou. Později r. 1912 dokázal analogický výsledek pro funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$ Ch. de la Vallée-Pousin (1866 – 1962); přesněji: *Pokud trigonometrická řada konverguje bodově všude v* $\mathbb{R}$ *ke (konečné) funkci* $f \in \mathcal{L}(2\pi)$*, potom je tato řada Fourierovou řadou funkce* f.

O řadách podobného typu je známo obecnější tvrzení: *Jsou-li* $\{a_k\}$ *a* $\{b_k\}$ *klesající posloupnosti kladných čísel konvergující k* 0 *a*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt\,, \quad g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt\,,$$

pak tyto řady jsou Fourierovými řadami, právě když $f, g \in \mathcal{L}(2\pi)$.

To, že mohou existovat všude konvergentní trigonometrické řady, které nejsou Fourierovými řadami, bylo chápáno jako jistý nedostatek Lebesgueova integrálu. Motivovalo to Denjoya k dalšímu zobecňování integrálu.

Kapitola 3

Fourierovy řady

V této kapitole si budeme všímat již výhradně Fourierových řad, a to jak v reálném, tak i komplexním tvaru. Seznámíme se se základními vztahy a vzorci, které pro nás budou mít v dalším textu pomocný charakter.

3.1 Proč jsou Fourierovy ?

V období do vydání Fourierovy práce byl D. Bernoulli (1700 – 1782) patrně jediný, kdo byl hluboce přesvědčen o možnosti vyjádření „jakýchkoli" funkcí pomocí trigonometrických řad. K tomuto poznatku dospěl při vyšetřování chvění strun a při snaze k výsledkům nalézt uspokojivý matematický model. Soudobí matematici však žili v zajetí představ hrubě charakterizovatelných heslem „*spojitost = existence analytického vyjádření*", kterému Bernoulliho přesvědčení hrubě odporovalo.

Všimněme si nyní podrobněji Fourierovy práce o šíření tepla [26], která měla velmi složitý osud. J. B. Fourier (1768 – 1830) podal k posouzení pařížské akademii věd r. 1807 svůj *Mémoire* … ; viz [24]. Vycházel z několika základních principů:

(a) Prvotní příčiny jevů nejsou známy, ale jevy podléhají jednoduchým zákonitostem, které lze odhalit pozorováním.

(b) Fyzikální problémy lze převést na problémy matematické a ty pak řešením dovést ke konečným (numerickým) výsledkům.

(c) Matematika je stejně rozmanitá jako příroda.

V práci Fourier velmi úspěšně řešil nejen fyzikální, ale i matematické problémy. Od začátku výkladu ukazoval, že soudobé matematické nástroje a prostředky jsou nedostačující. Pro nás je zajímavá jen část matematického aparátu, který používal, a to podstatně více než problémy, které jím řešil. Práci posuzovali velmi známí matematici: P. S. Laplace (1749 –1827), J. L. Lagrange (1736 – 1813), S. F. Lacroix (1765 – 1843) a G. Monge (1746 – 1818). Posudek nebyl příznivý, ne však zcela odmítavý. I pro soudobé matematiky byla Fourierova práce natolik zajímavá, že se rozhodli její ústřední problém (vedení tepla) vyhlásit jako hlavní téma pro velkou cenu akademie pro r. 1912.

Prakticky stejné grémium pak práci, kterou Fourier podal po přepracování r. 1811, přisoudilo tuto cenu. Na druhé straně byla v posudku obsažena kritika Fourierovy přesnosti a užitých metod. Práce *nebyla* publikována v memoárech pařížské akademie a objevila se v přepracované a rozšířené verzi až r. 1822.

Pro ilustraci uveďme trochu zjednodušeně jeden z problémů, kterým se Fourier zabýval. Šlo o popis vedení tepla v nekonečné tenké „obdélníkové" desce. V $\mathbb{R}^2$ tuto oblast popíšeme jako množinu $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ;\, x \geq 0,\, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$.

Hledaná funkce $z = z(x, y)$ na M měla vyhovovat podmínkám

$$f(y) = z(0, y),\ y \in [-\pi/2, \pi/2]\ \text{je sudá funkce, a}$$
$$z(x, -\pi/2) = z(x, \pi/2) = 0,\ x \in (0, +\infty),$$

a být řešením (Laplaceovy) rovnice, která popisuje ustálený stav

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{3.1}$$

První a nejdůležitější případ, který řešil, byl $f(y) \equiv 1$. Fourier hledal řešení ve tvaru $z(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ (tomuto způsobu řešení se říká *metoda separace proměnných*). Z rovnice (3.1) dostal

$$\varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0,$$

a za předpokladu, že obě derivace φ'', ψ'' nenabývají hodnoty 0, rovnici

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)} = -\frac{\psi(y)}{\psi''(y)}.$$

Levá strana předcházející rovnosti závisí pouze na x a pravá zase pouze na y, jsou proto konstantní (a nemění znamení). S ohledem na okrajové podmínky $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ musí být

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)} = c > 0, \quad \frac{\psi(y)}{\psi''(y)} = -c < 0.$$

Fourier nyní položil $c = 1/n^2$ a dostal pro každé $n \in \mathbb{N}$ obecná řešení

$$\varphi(x) = c_1 \mathrm{e}^{-nx} + c_2 \mathrm{e}^{nx}, \quad \psi(y) = c_3 \cos ny + c_4 \sin ny.$$

Protože hledaná funkce musí být sudá vzhledem k proměnné y, dostaneme $c_4 = 0$. Dále usoudil, že $c_2 = 0$, neboť s rostoucí vzdáleností od zdroje tepla musí teplota konvergovat k 0. Tak dospěl k vyjádření

$$z(x, y) = c\mathrm{e}^{-nx} \cos ny, \tag{3.2}$$

kde konstanty c a n je třeba určit. „Obecné řešení“ popsal v analogii k obyčejným diferenciálním rovnicím jako „nekonečnou lineární kombinaci“

$$z(x, y) = a_1 \mathrm{e}^{-n_1 x} \cos n_1 y + a_2 \mathrm{e}^{-n_2 x} \cos n_2 y + a_3 \mathrm{e}^{-n_3 x} \cos n_3 y + \cdots$$

Okrajová podmínka $\psi(-\pi/2) = \psi(\pi/2) = 0$ je splněna pro $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, …, a tak pro obecnou sudou f po dosazení $x = 0$ obdržel

$$f(y) = a_1 \cos \pi y + a_2 \cos 3\pi y + a_3 \cos 5\pi y + \cdots, \tag{3.3}$$

což je vyjádření f pomocí Fourierovy řady.

Jeden detail. Fourier pro $f \equiv 1$ hledal koeficienty rozkladu poměrně komplikovaným způsobem, a to řešením „nekonečné soustavy rovnic o nekonečně mnoha neznámých“. Tuto soustavu obdržel postupným derivováním:

$$\begin{aligned}
1 &= a_1 \cos y + a_2 \cos 3y + a_3 \cos 5y + a_4 \cos 7y + \cdots \\
0 &= a_1 \sin y + 3a_2 \sin 3y + 5a_3 \sin 5y + 7a_4 \sin 7y + \cdots \\
0 &= a_1 \cos y + 3^2 a_2 \cos 3y + 5^2 a_3 \cos 5y + 7^2 a_4 \cos 7y + \cdots \\
0 &= a_1 \sin y + 3^3 a_2 \sin 3y + 5^3 a_3 \sin 5y + 7^3 a_4 \sin 7y + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Do této soustavy dosadil $y = 0$ a po složitém výpočtu dostal např. vyjádření a_1 pomocí nekonečného součinu tvaru

$$a_1 = \frac{3^2}{3^2 - 1^2} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1^2} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1^2} \cdot \frac{9^2}{9^2 - 1^2} \cdot \ldots ;$$

analogická vyjádření obdržel i pro $a_2, a_3, \ldots$. Po zjednodušení dospěl k rovnosti

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \cdots$$

Na tehdejší dobu předvedl Fourier neobyčejný výkon! Ch. E. Picard (1856 – 1941) o tom později napsal: *Byl to ve své době odvážný výzkum a my v něm nemusíme hledat přesnost žádanou v dnešní době. V každém případě bychom neměli zapomenout, že se Fourier jako první odvážil řešit nekonečnou soustavu rovnic o nekonečně mnoha neznámých. V analýze je mnoho problémů, které vedou na řešení takových soustav.* Poznamenejme, že Fourier zcela moderně definuje konvergenci funkčních řad, ale nezabývá se jí. U popsané řady její důkaz přenechává čtenáři a podotýká, že v intervalu $(\pi/2, 3\pi/2)$ konverguje k $-\pi/4$, atd. Na jiném místě konstatuje, že tato řada konverguje pomalu. Uvádí i obvyklé vzorce pro výpočet koeficientů řady pomocí integrálu, s nimiž se dále seznámíme.

Cvičení 3.1.1. Pomocí vztahu (4) z úvodní části odvoďte „eulerovsky" pro všechna $x \in (0, \pi)$ formálně, bez hlubšího zdůvodnění, vyjádření

$$1 = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots\Big).$$

Podobně odvoďte pro všechna $x \in (\pi/2, \pi/2)$

$$1 = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots\Big).$$

Později, až budeme mít dokázánu tzv. Fejérovu větu, tyto vzorce dostaneme velmi jednoduše „zadarmo".

Cvičení 3.1.2. Opakovanou integrací odvoďte ze vzorce (5) z úvodní části s dosazenou hodnotou $C_2 = \pi^2/6$ vzorec

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4} = -\frac{x^4}{48} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{\pi^2 x^2}{4} + \frac{\pi^4}{90}, \tag{3.4}$$

ze kterého vyplývá $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \pi^4/90$. Hodnotu integrační konstanty určete obdobně jako při odvozování vzorce (5) dosazením $x = \pi/2$ a $x = \pi$.

Nyní ukážeme, že vzorec (4) z úvodní části je jednoduchým příkladem Fourierovy řady nespojité funkce f, takže tato řada *nekonverguje stejnoměrně*; proto na ni úvahu o stejnoměrné konvergenci nemůžeme použít.

Příklad 3.1.1. Označme $f(x) = (\pi - x)/2$, $x \in (0, 2\pi)$, a spočtěme Fourierovy koeficienty funkce f, resp. jejího 2π-periodického rozšíření na $\mathbb{R}$. Pro $k = 0$ je zřejmě

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

protože f je lichá integrovatelná funkce. Pro $k \neq 0$ je

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - t}{2}\,\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi - t}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-ikt}}{-ik}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{\mathrm{e}^{-ikt}}{-ik}\Big) = \frac{1}{2ki}. \tag{3.6}$$

Protože $a_k = c_k + c_{-k} = 0$, $b_k = i(c_k - c_{-k}) = 1/k$, je

$$\frac{\pi - x}{2} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k},$$

ale to je zatím vše, co můžeme o řadě říci. Je však zřejmé, že ve všech bodech tvaru $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, je součet řady roven $f(x) = 0$.

3.2 Trigonometrické polynomy

V této části si blíže všimneme vlastností systému všech trigonometrických polynomů, zejména jejich vztahu k prostorům spojitých a integrovatelných funkcí. Pokusíme se rovněž pomocí srovnání ukázat, jak lze použitím vhodného zápisu pracovat výhodněji, pokud chceme „specifické“ tvrzení.

Lemma 3.2.1. *Součet a součin trigonometrických polynomů (tedy také i mocnina trigonometrického polynomu s exponentem $k \in \mathbb{N}_0$) je opět trigonometrický polynom. Systém $\mathcal{T}$ všech trigonometrických polynomů tvoří algebru. Posunutím o $a \in \mathbb{R}$ přejde trigonometrický polynom $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, opět v trigonometrický polynom $T(t+a)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Pokud pracujeme s exponenciálním vyjádřením, je trigonometrický polynom konečnou lineární kombinací funkcí e^{ikt} tvaru $\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikt}$ s komplexními koeficienty c_k. Odtud je tvrzení zřejmé, snad s výjimkou části o posunutí. Ta plyne z toho, že rovnost

$$c_k \mathrm{e}^{ik(t+a)} = \left(c_k \mathrm{e}^{ika}\right) \cdot \mathrm{e}^{ikt}$$

aplikujeme na jednotlivé členy polynomu. □

Poznámka 3.2.2. Předcházející tvrzení platí i pro polynomy v „trigonometrickém tvaru“ s reálnými koeficienty a_k, b_k; důkaz je opět snadný, stačí si uvědomit platnost vzorců ze středoškolské látky. Tvrzení o součinu si stačí rozmyslet pro dva činitele. To však vyplyne ze vzorců (1.29) a(1.31), které jsme již připomínali. Konečně tvrzení o posunutí je důsledkem součtových vzorců pro $\sin(t+a)$ a $\cos(t+a)$. Celkově je to patrně jednodušší než práce s podmínkou symetrie $c_{-k} = \overline{c_k}$ z (2.6).

Důsledek 3.2.3. *Systém $\mathcal{T}_n$ všech trigonometrických polynomů stupně nejvýše n-tého tvoří lineární podprostor prostoru $\mathcal{T}$; pokud značíme symbolem $\subset\subset$ vztah „být podprostorem lineárního prostoru“, je $\mathcal{T}_n \subset\subset \mathcal{T} \subset\subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$.*

Budeme-li na prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$ pracovat s normou, platí

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\,;\, t \in I\}\,,$$

kde I je libovolný interval délky alespoň 2π. Při užití jiné normy to vždy explicitně uvedeme. Připomeňme, že pokud $f_n \in \mathcal{C}(2\pi)$ a posloupnost $\{f_n\}$ *stejnoměrně konverguje k funkci* f, je nutně $f \in \mathcal{C}(2\pi)$. Platí též zřejmě inkluze

$$\mathcal{T} \subset\subset \mathcal{C}(2\pi) \subset\subset L_2(2\pi)\,.$$

Další analogie mezi polynomy a trigonometrickými polynomy se týká stejnoměrné aproximace.

Poznámka 3.2.4. Obě věty, tj. klasickou o stejnoměrné aproximaci (komplexní) funkce na uzavřeném intervalu $[a,b]$ „obyčejnými“ polynomy i tu, kterou nyní dokážeme, publikoval Weierstrass v práci [72] z r. 1885. Věty nejsou nezávislé, z kterékoli z nich lze dokázat tu zbývající, avšak cesta od klasické k trigonometrické je trochu složitější. Později ji dostaneme jako důsledek tzv. Fejérovy věty. Pro zajímavost uvedeme elementární poněkud pracný klasický důkaz.

Věta 3.2.5 (Weierstrass 1885). *Nechť $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom T, pro který je $\|f - T\| < \varepsilon$.*

Důkaz. Budeme provádět elementární úvahy založené na vlastnostech trigonometrických polynomů, popsaných v Lemmatu 3.2.1. Nejprve dokážeme částečný výsledek, který nám pak pomůže dokázat obecné tvrzení: Ke každému $\varepsilon > 0$ a každé funkci $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$ existuje trigonometrický polynom T, který je *sudou funkcí* a pro který je $|f(t) - T(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in [0,\pi]$.

Funkce $x \mapsto f(\arccos x)$, $x \in [-1, 1]$ je spojitá, takže existuje takový polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ stupně $n \in \mathbb{N}$, pro nějž

$$\Big| f(\arccos x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Big| < \varepsilon \,.$$

Položíme-li $x = \cos t$, dostaneme pro všechna $t \in [0, \pi]$

$$\Big| f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k t \Big| < \varepsilon \,,$$

kde součet je zřejmě sudým trigonometrickým polynomem. Nyní již přejdeme k důkazu vyslovené věty: Je-li $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, rozložíme ji na sudou a lichou část

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2} \,.$$

Funkce $g_1(t) = (f(t) + f(-t))/2$ a $g_2(t) = \sin t \cdot (f(t) - f(-t))/2$ jsou obě sudé, a tak k danému $\varepsilon > 0$ existují trigonometrické polynomy T_1, T_2 tak, že

$$|g_k(t) - T_k(t)| < \frac{\varepsilon}{4} \,, \quad k = 1, 2 \quad \text{a} \quad t \in [0, \pi] \,.$$

Protože g_k i T_k, $k = 1, 2$, jsou sudé funkce, platí nerovnost i na intervalu $[-\pi, \pi]$. Tyto funkce jsou však i 2π-periodické, a tak nerovnost platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Odtud vyplývá, že trigonometrické polynomy

$$T_3(t) = T_1(t) \sin^2 t \quad \text{a} \quad T_4(t) = T_2(t) \sin t$$

aproximují s přesností $\varepsilon/4$ funkce $g_1(t) \sin^2 t$ a $g_2(t) \sin t$, takže pro jejich součet

$$g_1(t) \sin^2 t + g_2(t) \sin t = f(t) \sin^2 t$$

dostáváme pro $T_5 = T_3 + T_4$ odhad

$$|f(t) \sin^2 t - T_5(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Připomeňme, že v této úvaze jsme pracovali s libovolnou funkcí $f \in \mathcal{C}(2\pi)$. Analogicky lze k 2π-periodické funkci $g : t \to f(t - \pi/2)$, $t \in \mathbb{R}$ nalézt trigonometrický polynom T_6 tak, že pro $T_7(t) = T_6(t + \pi/2)$

$$|f(t) \cos^2 t - T_7(t)| = |f(t) \cos^2 t - T_6(t + \pi/2)| = |g(t) \sin^2 t - T_6(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Konečně pro $T_8 = T_5 + T_7$ dostaneme pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t) - T_8(t)| = |f(t)(\sin^2 t + \cos^2 t) - T_5(t) - T_7(t)| < \varepsilon \,,$$

čímž je důkaz tvrzení dokončen. □

V další větě budeme silně využívat poznatků z teorie integrálu. Připomeňme, že z vlastností stejnoměrné konvergence a předcházející věty vyplývá hustota systému všech trigonometrických polynomů v prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$ i v případě, že je uvažujeme jako podprostory $L_p(2\pi)$ s normou $\| \centerdot \|$. Dokážeme však ještě více. Platí následující tvrzení.

Věta 3.2.6. *Nechť $1 \le p < \infty$, $\varepsilon > 0$ a nechť $f \in L_p(2\pi)$. Potom existuje trigonometrický polynom T tak, že $\| f - T \|_p < \varepsilon$.*

Důkaz. Uvedeme stručný popis jednotlivých kroků důkazu. Uvědomíme si, že stačí nalézt spojitou funkci g na intervalu $[-\pi, \pi]$, pro kterou $g(-\pi) = g(\pi)$ a tuto funkci periodicky rozšířit s periodou 2π na $\mathbb{R}$. Tuto funkci g pak aproximujeme trigonometrickým polynomem T podle Věty 3.2.5 tak, aby např. platila nerovnost $\|g - T\|_p < \varepsilon/4$.

Funkci $f \in L_1(2\pi)$ nejprve aproximujeme *jednoduchou omezenou* funkcí g_1 tak, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_1(t)|^p \, \mathrm{d}t = \| f - g_1 \|_p^p < (\varepsilon/4)^p.$$

Funkci g_1 dále aproximujeme pomocí Luzinovy věty (srv. [62], Věta 2.23) a sestrojíme *spojitou funkci* g_2 s kompaktním nosičem tak, že množina

$$\{x \in [\,-\pi, \pi\,]\,;\, g_1(x) \neq g_2(x)\}$$

bude mít tak malou míru, aby platilo $\|g_1 - g_2\|_p < \varepsilon/4$. Konečně definujeme spojitou funkci g na intervalu $[\,-\pi, \pi\,]$ tak, že $g = g_2$ na $[\,-\pi, \pi - \delta\,]$, $0 < \delta < 2\pi$, a g je lineární na intervalu $[\,\pi - \delta, \pi\,]$, přičemž $g(\pi) = g(-\pi)$. Přitom použijeme možné volby δ k tomu, aby $\|g_2 - g\|_p < \varepsilon/4$. Zbytek je důsledkem trojúhelníkové nerovnosti. $\square$

3.3 Dirichletovo a Fejérovo jádro

V této části zavedeme funkce, které se nazývají obvykle Dirichletovo a Fejérovo jádro, a shrneme jejich vlastnosti, které budeme v dalším výkladu potřebovat. Jak ukážeme později, Fejérovo jádro má „lepší" vlastnosti.

Hodnotu *částečného součtu* prvních $n+1$ členů Fourierovy řady v bodě $x \in \mathbb{R}$ budeme značit $s_n(f, x)$, tj.

$$s_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx} \,. \tag{3.7}$$

Budeme se snažit najít podmínky, které zaručí pro dostatečně širokou třídu funkcí f konvergenci $s_n(f, x)$, dle možnosti přímo k hodnotě $f(x)$, a to nejen ve smyslu obyčejné konvergence, ale i ve smyslu jednoduchých sčítacích metod. Proto bude pro nás důležité vyjádřit $s_n(f, x)$ v takové formě, abychom mohli s $s_n(f, x)$ jednoduše pracovat. Zavedeme proto dvě důležité funkce (*jádra*), které nám takové elegantní vyjádření $s_n(f, x)$ umožní. Budeme pracovat s *Dirichletovým jádrem* D_n a *Fejérovým jádrem* K_n. Označíme-li pro $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} \,, \tag{3.8}$$

lze částečný součet $s_n(f, x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-ikt} \, \mathrm{d}t \Big) \mathrm{e}^{ikx} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(t) \, \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik(x-t)} \Big) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \, \mathrm{d}t \,, \end{aligned}$$

takže platí vzorec

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \, \mathrm{d}t \,. \tag{3.9}$$

Podobně pro vyjádření průměrů posloupnosti částečných součtů zavedeme označení $\sigma_n(f, x) = 1/(n+1) \sum_{k=0}^{n} s_k(f, x)$. Snadno nahlédneme, že

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) \, \mathrm{d}t \,, \tag{3.10}$$

kde jádro K_n je vyjádřeno pomocí jader D_n vzorcem

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) . \tag{3.11}$$

Právě „zprůměrování“ je příčinou podstatně odlišných vlastností obou jader. Všimneme si nejprve vyjádření Dirichletova jádra, avšak před tím uvedeme několik poznámek.

Poznámky 3.3.1. (a) Pojem Fourierovy řady je *podstatně spjat s užívaným integrálem.* Při použití Lebesgueova integrálu můžeme Fourierovu řadu vytvořit pro podstatně širší třídu funkcí f, neboť koeficienty a_k, b_k a c_k jsou definovány právě pomocí integrálu, jehož existence závisí na f.

(b) Velikost periody není příliš podstatná: můžeme analogicky pracovat se systémem funkcí $\{1, \sin(2k\pi x), \cos(2k\pi x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, které jsou 1-periodické, nebo pro $l > 0$ s funkcemi $\{1, \sin(2k\pi x/l), \cos(2k\pi x/l)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, které mají periodu l.

(c) Existují-li integrály, definující Fourierovy koeficienty f, pak pro *sudou* funkci f platí $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a podobně pro *lichou* funkci f je $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. To hraje roli při formulaci příkladů typu: „ ... rozveďte v sinovou řadu funkci f“ nebo „ ... rozveďte v kosinovou řadu“, apod. S takovými formulacemi, které je třeba chápat jako jisté licence, umožňující stručnější vyjádření, se čtenář setká zejména při formulaci příkladů a cvičení.

(d) Budeme užívat označení $\widehat{f}(k)$ pro c_k, $k \in \mathbb{Z}$; je z něj patrné, s jakou funkcí pracujeme a později vede ke zvýraznění formální souvislosti s Fourierovou transformací funkce f

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-itx}\, \mathrm{d}t\,, \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Pro snadné vyjádření Dirichletova a Fejérova jádra se nám budou hodit některé elementární vzorce. Z Moivreovy věty vyplývá pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} \cos kx + i \sum_{k=1}^{n} \sin kx\,;$$

snadno nahlédneme, že také

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx} &= \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{ix}} \frac{\mathrm{e}^{-ix/2}}{\mathrm{e}^{-ix/2}} = -\frac{\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{i(n+1/2)x}}{\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2}} = \\
&= \frac{[\cos(n+1/2)x + i\sin(n+1/2)x\,] - [\cos x/2 + i\sin x/2\,]}{2i\sin x/2} = \\
&= \frac{[\sin(n+1/2)x - \sin x/2\,] + i\,[\cos x/2 - \cos(n+1/2)x\,]}{2\sin x/2}\,.
\end{aligned}$$

Odtud dostaneme vzorce

$$C_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin x/2}{2\sin x/2}\,, \tag{3.12}$$

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos x/2 - \cos(n+1/2)x}{2\sin x/2}\,, \tag{3.13}$$

které platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$, resp. kratšeji $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (poslední „součin“ chápeme „množinově“).

Důsledek 3.3.2. Z (3.12), (3.13) plynou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ odhady

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\Big| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,, \quad \Big|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\Big| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,. \tag{3.14}$$

Je vhodné si povšimnout, že druhý ze součtů je pro *každé* $x \in \mathbb{R}$ omezený nezávisle na $n \in \mathbb{N}_0$: pro $x = 2\pi k$ jsou totiž částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ vesměs rovny 0. Odhad je závislý na x, stejnoměrný odhad vzhledem k $x \in \mathbb{R}$ nalézt nelze. Na druhé straně však na každém kompaktním intervalu I neobsahujícím násobek $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, lze součty odhadnout nezávisle na $x \in I$. Podle Věty 1.2.7 za předpokladu, že nerostoucí posloupnosti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ konvergují k 0, je konvergence řad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ na každém takovém intervalu I stejnoměrná.

V dalším budeme mnohokrát používat vyjádření z následujícího tvrzení:

Lemma 3.3.3 (Dirichletovo jádro). *Dirichletovo jádro D_n, $n \in \mathbb{N}_0$, má následující vlastnosti:*

(a) $$D_n(x) = \frac{1}{2}\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} \big(\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx}\big)\Big) = \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\Big) = \\ = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\,\sin x/2} = (1/2)\big(\sin(nx)\cdot\mathrm{cotg}(x/2) + \cos(nx)\big)\,,$$

přičemž vyjádření na druhém řádku mají smysl pouze pro $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

(b) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x \;= 1\,,$

(c) $D_n(x) = D_n(-x)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

(d) $\displaystyle D_n(x) \le \frac{2n+1}{2}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

(e) $\displaystyle |D_n(x)| \le \frac{\pi}{2x}\,,\ x \in (0, \pi\,]\,.$

Důkaz. První dvě rovnosti v (a) plynou z definice jádra (3.8) a Eulerových vzorců (2.2). Z tohoto vyjádření též vidíme, že D_n jsou vesměs sudé funkce, platí tedy (c).

Vyjádření na druhém řádku v (a) dostaneme úpravou ze vzorce (3.12) nebo z druhé rovnosti v (1.30) dosazením $(k+1/2)x$ za m a $(k-1/2)x$ za n. Dostaneme tak pro $k = 1, 2, \ldots, n$ rovnosti

$$\sin\Big(k + \frac{1}{2}\Big)x - \sin\Big(k - \frac{1}{2}\Big)x = 2\cos(kx)\sin\frac{x}{2}$$

a jejich sečtením spolu s využitím „teleskopičnosti“ součtu vzorec

$$\sin\Big(n + \frac{1}{2}\Big)x - \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\,\Big(2\sum_{k=1}^{n} \cos kx\Big)\,.$$

Levou stranu ještě upravíme pomocí druhé rovnosti v (1.30) a po další jednoduché úpravě obdržíme s přihlédnutím k již odvozenému vyjádření D_n

$$\sin\Big(k + \frac{1}{2}\Big)x = 2\sin\frac{x}{2}\,\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\Big) = 2\sin\frac{x}{2}\,D_n(x),. \tag{3.15}$$

To již pro $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ dává třetí rovnost. Další rovnost dostaneme z (3.15) rozepsáním levé strany pomocí součtového vzorce pro funkci sinus a úpravou, ovšem opět pouze pro $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Konstantní funkce $f \equiv 1$ je prvkem trigonometrického systému, jehož prvky jsou vzájemně ortogonální. Odtud plyne

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2} = 1$$

pro všechna $n \geq 0$; tím jsme dokázali rovnost v (b). Odhad v (d) vyplývá z „kosinového“ vyjádření D_n v (a). Konečně snadno nahlédneme, že funkce sin je na intervalu $[\,0,\pi/2\,]$ konkávní, takže je na tomto intervalu zdola odhadnuta funkcí $2x/\pi$. Proto je

$$\sin\frac{x}{2} \geq \frac{2x}{\pi}\,/\,2 = \frac{x}{\pi}\,, \quad x \in (0,\pi\,]\,, \tag{3.16}$$

z čehož už snadno obdržíme

$$\Big|\,\frac{\sin((n+1/2)x}{2\sin(x/2)}\,\Big| \leq \frac{1}{2\cdot x/\pi} = \frac{\pi}{2x}\,. \tag{3.17}$$

Tím jsou všechna tvrzení lemmatu dokázána. □

Poznámka 3.3.4. Analogicky dostaneme z odhadů (3.14) jako jednoduchý důsledek odhady

$$|S_n(x)| \leq \pi/2x\,,\ x \in (0,\pi\,]\,, \quad \text{a} \quad |D_n(x)| \leq \pi/2x\,,\ x \in (0,\pi\,]\,, \tag{3.18}$$

které nám i v dalším budou užitečné.

Lemma 3.3.5 (Fejérovo jádro). *Fejérovo jádro K_n, $n \in \mathbb{N}_0$, má následující vlastnosti:*

(a) $K_n(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=-n}^{n}\Big(1-\frac{|j|}{n+1}\Big)\,e^{ijx} = \frac{2}{(n+1)}\left(\frac{\sin\big((n+1)x/2\big)}{2\sin\big(x/2\big)}\right)^2,$
kde druhá rovnost platí pouze pro $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

(b) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1\,,$

(c) $K_n(x) = K_n(-x)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

(d) $0 \leq K_n(x) \leq \dfrac{n+1}{2}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

(e) $0 \leq K_n(x) \leq \dfrac{\pi^2}{2(n+1)x^2}\,, \quad x \in (0,\pi]\,.$

Důkaz. Z definice Dirichletova jádra plyne pro $n \geq 0$

$$(n+1)K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\sum_{j=-k}^{k} \mathrm{e}^{ijx} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(n+1-|k|)\,\mathrm{e}^{ikx}\ ,$$

což dává první část (a). Poslední rovnost nejsnáze nahlédneme z následujícího schematického rozpisu výrazu za první sumou:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\big(\,\mathrm{e}^{i0x} + \\
&\quad \mathrm{e}^{i0x} + \mathrm{e}^{i1x} + \mathrm{e}^{-i1x} + \\
&\quad \mathrm{e}^{i0x} + \mathrm{e}^{i1x} + \mathrm{e}^{-i1x} + \mathrm{e}^{i2x} + \mathrm{e}^{-i2x} + \\
&\quad \vdots \\
&\quad \mathrm{e}^{i0x} + \mathrm{e}^{i1x} + \mathrm{e}^{-i1x} + \mathrm{e}^{i2x} + \mathrm{e}^{-i2x} + \cdots + \mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}\big)\,;
\end{aligned}$$

zde je e^{i0x} v prvním sloupci $(n+1)$-krát, e^{ix} a e^{-ix} je ve druhém a třetím sloupci n-krát, atd., a konečně e^{inx} a e^{-inx} v posledních dvou sloupcích jedenkrát.

Pro důkaz druhé rovnosti v (a) vyjdeme z vyjádření (3.11), z něhož plyne

$$(n+1)K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_n(x)\,; \tag{3.19}$$

dosadíme-li za $D_k(x)$, $k = 0, \ldots, n$, „sinová“ vyjádření z Lemmatu 3.3.3, dostaneme po vynásobení vzniklé rovnosti faktorem $2\,\sin^2(x/2)$

$$2\,(n+1)\sin^2(x/2)K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin\big((k+1/2)x\big)\sin(x/2)\,.$$

Součiny, které sčítáme na pravé straně předcházející rovnosti, upravíme pomocí třetího vzorce v (1.30) na tvar, ve kterém využijeme teleskopičnosti konečného součtu. Tak postupně dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx - \cos\,(k+1)x}{2} = \frac{1-\cos((n+1)x)}{2} = \sin^2\Big((n+1)\frac{x}{2}\Big)\,,$$

z čehož jednoduchou úpravou plyne zbytek (a) a zároveň též i (c).

Rovnost (b) plyne z definice K_n a z Tvrzení 3.3.3 (b). Z vyjádření Dirichletova jádra dostáváme z Tvrzení 3.3.3 (a) „hrubým“ odhadem $|D_k(x)| \le (2k+1)/2$, takže pro nezáporné Fejérovo jádro $K_n(x)$ je

$$(n+1)K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_n(x) \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(n+1)^2}{2}\;;$$

odtud již snadno plyne (d). Protože jsme pro $x \in (0,\pi]$ odvodili odhad (3.16), dostáváme jeho užitím

$$0 \le K_n(x) \le \Big(\frac{\pi}{x}\Big)^2 \frac{1}{2(n+1)}\,, \quad 0 < x \le \pi\,.$$

Tím jsou všechny výše uvedené vlastnosti jádra K_n dokázány. $\square$

Poznámka 3.3.6. Některá vyjádření obou jader budí podezření, že mohou být obě jádra v okolí bodů, které vylučujeme („nulové body jmenovatelů“), neomezená. Vyjádření pomocí kosinů v Lemmatu 3.3.3 a vyjádření K_n pomocí D_n však ukazují, že obě jádra jsou ve skutečnosti spojitými funkcemi na $\mathbb{R}$. Často se za jádra považují tato spojitá rozšíření i v případě vyjádření, ve kterých jsme body tvaru $2\pi\mathbb{Z}$ vyloučili.

Kapitola 4

Bodová konvergence Fourierovy řady

V této kapitole si podrobněji všimneme otázek konvergence Fourierovy řady a dokážeme některá tvrzení o její bodové konvergenci.

4.1 Nejjednodušší případ

Připomeňme, že pro funkci $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ jsme již dokázali, že platí

$$|\widehat{f}(k)| \to 0 \quad \text{pro} \quad |k| \to +\infty\,.$$

Tvrzení 2.2.5, ze kterého jsme tento poznatek odvodili, ač bývá „skromně“ nazýváno Riemann-Lebesgueovo lemma, je ve skutečnosti velmi důležitým a silným tvrzením. V jeho Důsledku 2.4.2 je totiž již obsažen klíč k elegantnímu důkazu bodové konvergence Fourierovy řady. Dokážeme jednoduchou variantu takového tvrzení, důkaz však lze dále bez relativní ztráty jednoduchosti zobecňovat; srv. [32]. Důkaz je proti klasickému kratší a umožňuje jiný pohled na problematiku konvergence Fourierových řad, ale je zejména při prvním studiu této problematiky „méně průhledný“.

Tvrzení 4.1.1. *Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a nechť $t \in \mathbb{R}$ je takový bod, ve kterém má f vlastní derivaci $f'(t)$. Potom pro částečné součty Fourierovy řady platí*

$$s_n(f,t) \to f(t) \quad \textit{pro} \quad n \to +\infty\,.$$

Důkaz. Budeme pracovat s exponenciálním tvarem Fourierovy řady. Jestliže funkce f je z $\mathcal{P}(2\pi)$ a $\widehat{f}(k)$ její k-tý Fourierův koeficient, definujeme pro $m,n \in \mathbb{N}$

$$s_{m,n}(f,t) :\,= \sum_{k=-n}^{m} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt}\,;$$

tak jen nepatrně zobecňujeme „symetrické součty“ a dokážeme tedy o trochu více, totiž že

$$s_{m,n}(f,t) \to f(t) \quad \text{pro} \quad m,n \to +\infty\,.$$

Rozmyslíme si důkaz pro $t = 0$ a $f(t) = 0$, kdy bude formálně velmi jednoduchý. Tato redukce je bez ztráty obecnosti možná díky tomu, že závislost $s_n(f,t)$ na funkcích je lineární, a že po posunutí je vzniklá funkce opět z $\mathcal{P}(2\pi)$. Protože nyní platí $f(0) = 0$ a $f'(0)$ je vlastní, existuje pro funkci

$$g(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{ix} - 1} = -i\,\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\,\frac{ix}{\mathrm{e}^{ix} - 1} \tag{4.1}$$

konečná $\lim_{x\to 0} g(x)$ a g je tudíž v okolí bodu 0 omezená. Proto leží g také v L_1. Jelikož je $f(x) = (\mathrm{e}^{ix} - 1)g(x) = \mathrm{e}^{ix}g(x) - g(x)$, snadno nahlédneme, že pro Fourierovy koeficienty funkce f platí

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k)\,. \tag{4.2}$$

Odtud však vidíme, že Fourierova řada funkce f je ve zřejmém smyslu *teleskopická*. Proto platí podle Důsledku 2.4.2

$$s_{m,n}(f,0) = \sum_{k=-n}^{m} \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(m) \to 0 = f(0) \quad \text{pro} \quad m,n \to +\infty\,,$$

čímž je důkaz dokončen. □

Poznámky 4.1.2. 1. Již předcházející Tvrzení 4.1.1 nám umožňuje v jednoduchých případech rozhodnout o bodové konvergenci Fourierovy řady. Tak např. Fourierova řada funkce z Příkladu 3.1.1 konverguje k této funkci ve všech bodech $\mathbb{R}$ a vzorec (4) z úvodní kapitoly platí pro všechna $t \in (0, 2\pi)$.

2. Ze vztahu (4.1) je zřejmé, že pro omezenost funkce g v okolí nulových bodů jmenovatele stačí omezenost

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\,, \quad \text{resp.} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

v nějakém okolí bodu 0, resp. x_0.

Příklady 4.1.3. 1. Položíme-li $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$, je 2π-periodické rozšíření f_1 této funkce definovámo na $\mathbb{R} \setminus \{x\,;\, x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ a je to lichá funkce, ležící v $\mathcal{P}(2\pi)$. Proto bude platit pro Fourierovy koeficienty f_1 rovnost $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, zatímco pro $k \in \mathbb{N}$ je

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin kx \,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{2}{\pi}\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{x=0}^{\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\,.$$

Proto, vzhledem k diferencovatelnosti f_1 na $\mathbb{R} \setminus \{x\,;\, x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, platí na této možině

$$f_1(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\sin kt}{k} = 2\Big(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \cdots\Big)\,.$$

Snadno též nahlédneme, že ve zbývajících bodech $t \in \mathbb{R}$ konverguje tato řada z definice k 0.

2. Podobně při analogickém označení, ale již trochu rychleji, pro funkci $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$ a její 2π-periodické rozšíření f_1 dostaneme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2x^3}{3\pi}\Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}\,,$$

a pro ostatní k, tj. $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos kx\,\mathrm{d}x \;&=\; \frac{2x^2 \sin kx}{k\pi}\Big|_{x=0}^{\pi} - \frac{4}{k\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,\mathrm{d}x \;= \\ &= \frac{4x\cos kx}{k}\Big|_{x=0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x \;=\; (-1)^k\frac{4}{k^2}\,. \end{aligned}$$

Proto platí pro $t \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$f_1(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4\Big(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \cdots\Big)\,. \tag{4.3}$$

Protože rovnost (4.3) platí pro $t = 0$, dostaneme jako vedlejší výsledek vzorec pro součet zajímavé číselné řady

$$G = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,; \tag{4.4}$$

řada v (4.4) konverguje absolutně. Označme

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{a} \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\,. \tag{4.5}$$

Snadno zjistíme pomocí elementárních operací s řadami, že platí $E = F + E/4$, tj. $F = 3E/4$, a $G = F - E/4 = E/2$; z těchto vztahů pak snadno obdržíme pro řady z (4.5)

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{4.6}$$

3. Je-li f definována na intervalu $(0,\pi)$, lze ji rozšířit na interval $(-\pi.\pi)$ různým způsobem. Tak lze získat různé rozvoje f na intervalu $(0,\pi)$. Je-li toto rozšíření sudou funkcí na $(-\pi.\pi)$, jsou koeficienty b_k tohoto rozvoje vesměs rovny 0, je-li toto rozšíření lichou funkcí na $(-\pi.\pi)$, jsou rovny 0 všechny koeficienty a_k. Toho se často používá.

Jednu z těchto možností jsme vyšetřili v předcházejícím příkladu, porovnáme ji proto s případem lichého rozšíření a určíme jeještě Fourierův rozvoj funkce $f_1(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi,\pi)$. Snadno spočteme

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin kx \,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{2(-1)^{k+1}\pi}{k} + \frac{4\big((-1)^k - 1\big)}{\pi k^3}\,.$$

Proto platí pro $t \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f_1(t) = 2\pi\Big(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \cdots\Big) - \\ - \frac{8}{\pi}\Big(\frac{\sin t}{1^3} + \frac{\sin 3t}{3^3} + \frac{\sin 5t}{5^3} + \cdots\Big)\,; \end{aligned} \tag{4.7}$$

srovnejte „názorná vyjádření“ obou rozvojů (4.3) a (4.7). Pro body nespojitosti funkce f_1, které jsou tvaru $t = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vidíme, že Fourierův rozvoj f_1 v těchto bodech konverguje k 0, což je průměr limit $f_1(t+) = \lim_{x\to t+} f_1(x)$ a $f_1(t-) = \lim_{x\to t-} f_1(x)$.

4. Vrátíme se ještě jednou k funkci $f(x) = x^2$ a nalezneme Fourierův rozvoj funkce f_1, což bude 2π-periodické rozšíření restrikce $f|_{[0,2\pi)}$. Snadno opět spočteme

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}\,, \quad a_k = \frac{4}{k^2}\,, \quad b_k = -\frac{4\pi}{k}\,,$$

z čehož dostaneme pro $t \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \\ &= \frac{4\pi^2}{3} + 4\Big(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \cdots\Big) - \\ &\qquad - 4\pi\Big(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots\Big)\,; \end{aligned} \tag{4.8}$$

srovnejte nalezené vyjádření s rozvoji (4.3) a (4.7). Snadno též nahlédneme, že v bodech $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je součet řady $2\pi^2$ a je opět průměrem jednostranných limit funkce f_1 v těchto bodech. Dosazením $t = 0$ dostaneme vztah

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

ze kterého pomocí úpravou opět dostaneme první rovnost v (4.6).

Poznámka 4.1.4. Poznamenejme, že v předchozích příkladech jsme pomocí již dokázaného jednoduchého Tvrzení 4.1.1 odvodili všechny poznatky zmíněné v úvodní kapitole, kde jsme je odvodili intuitivními nekorektními postupy tak, jak k nim dospěli matematici v 18. stol.

Příklad 4.1.5. Někdy vede vyjádření Fourierovou řadou k „teoretičtějším“ výsledkům. Funkce $\cos zx$ je sudou funkcí proměnné $x \in \mathbb{R}$ pro každé reálné z. V jejím vyjádření Fourierovou řadou budou koeficienty b_k vesměs nulové. Dále snadno spočteme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin zx}{z} \Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{2 \sin \pi z}{\pi z} .$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ dostaneme postupně

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zx \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big(\cos(z+k)x + \cos(z-k)x \big) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \Big(\frac{\sin(z+k)x}{z+k} + \frac{\sin(z-k)x}{z-k} \Big) \Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \Big(\frac{\sin(\pi z + k\pi)}{z+k} + \frac{\sin(\pi z - k\pi)}{z-k} \Big) = \\ &= (-1)^k \frac{2z \sin \pi z}{\pi (z^2 - k^2)} \end{aligned}$$

Po všechna $x \in \mathbb{R}$ tedy platí rovnost

$$\cos zx = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \Big(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 - z^2} \Big) . \tag{4.9}$$

Položíme-li nyní $x = \pi$ a dělíme-li výrazem $\sin \pi z$, dostaneme známý vzorec rozkladu funkce $\operatorname{cotg} \pi z$, $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{\pi} \Big(\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \Big) . \tag{4.10}$$

Poznámka 4.1.6. I když dále budeme dokazovat tvrzení se slabšími předpoklady, všimneme si ještě na okamžik vlivu předpokladů *silnějších*. Předpokládejme například, že $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ má spojitou druhou derivaci f''. Pak použití metody per partes dává

$$\begin{aligned} \pi a_k &= \frac{1}{k} f(t) \sin kt \Big|_{t=0}^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} f'(t) \sin kt \, dt = \\ &= \frac{1}{k^2} f'(t) \cos kt \Big|_{t=0}^{2\pi} - \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} f''(t) \cos kt \, dt ; \end{aligned}$$

je-li $M = \max \big\{ |f''(t)| ; t \in \mathbb{R} \big\}$, dostaneme odtud $|a_k| \le 2M/k^2$. Analogicky lze stejně snadno obdržet odhad $|b_k| \le 2M/k^2$, takže je

$$\big| \, a_k \cos kt + b_k \sin kt \big| \le 4M/k^2 , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

a Fourierova řada pro f konverguje k f stejnoměrně a „dost rychle“. Čtenář jistě snadno toto pozorování zobecní.

4.2 Fourierova řada spojité funkce

Čtenář, povzbuzený úspěchem při vcelku snadném získání pozitivních výsledků, může snadno načrtnout další plán postupu: funguje-li popsaná technika v bodech, ve kterých má funkce rozvíjená ve Fourierovu řadu, vlastní derivaci, mohli bychom nyní analogický výsledek o bodové konvergenci dokázat pro funkce z $\mathcal{C}(2\pi)$. Jde však o těžký a, jak dále ukážeme, i neřešitelný problém. Platí totiž následující tvrzení:

Věta 4.2.1 (du Bois-Reymond 1876). *Existuje funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada diverguje alespoň v jednom bodě.*

Poznámka 4.2.2. Původní důkaz této věty, který podal P. du Bois-Reymond (1831 – 1899), byl konstruktivní. I když původní důkaz byl zjednodušen a byly nalezeny přístupnější konstruktivní důkazy, použijeme *existenční důkaz*, založený na tzv. Banach-Steinhausově větě. Ta vyplývá z Baireovy věty, kterou nejdříve připomeneme.

Důkaz Věty 4.2.1. Využijeme poznatky z teorie metrických prostorů a Větu 1.5.4. Nejprve si uvědomíme, že $\mathcal{C}(2\pi)$ je úplný normovaný lineární prostor, protože supremová norma dává stejnoměrnou konvergenci. Budeme pracovat s Dirichletovým jádrem D_n. Z vyjádření (3.9) částečného součtu $s_n(f,x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x plyne, že $s_n(f,x)$ je v závislosti na $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}(2\pi)$.

Zvolme dále $x = 0$ a odhadněme normu lineárního funkcionálu $L_n f = s_n(f, 0)$ na prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$. Snadno obdržíme

$$\|L_n\| = \sup\left\{ \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(-t)\, \mathrm{d}t \right| ; \|f\| \le 1 \right\} \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, \mathrm{d}t = \|D_n\|_1 .$$

V tomto odhadu platí ve skutečnosti rovnost, protože funkci $\operatorname{sgn} D_n(t)$, pro kterou hodnota L_n je rovna $\|D_n\|_1$, lze libovolně přesně aproximovat spojitými funkcemi (ovšem v normě $\mathcal{P}(2\pi)$, nikoliv supremové!). Dostaneme tedy $\|L_n\| = \|D_n\|_1$. Nyní normu $\|D_n\|_1$ odhadneme zdola: z nerovnosti $|\sin(t/2)| \le t/2$, $t \in (0, \infty)$, plyne (integrand je sudá funkce)

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} \right| \mathrm{d}t \ge \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)t)| \frac{dt}{t} .$$

V posledním integrálu v předcházejícím vztahu provedeme nejprve substituci $u = (n+1/2)t$ a obdržený integrál pak budeme dále odhadovat:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin u|}{u} \frac{(n+1/2)}{n} \mathrm{d}u &> \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} \mathrm{d}u \ge \\ &\ge \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} |\sin u|\, \mathrm{d}u = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} . \end{aligned}$$

Z divergence harmonické řady dostáváme $\|L_n\| = \|D_n\|_1 \to +\infty$ pro $n \to \infty$, takže normy $\|L_n\|$ nejsou stejně omezené. Připomeňme, že za L_n byly zvoleny částečné součty $s_n(f, 0)$; existuje tedy $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, pro níž Fourierova řada v bodě 0 diverguje (a dokonce je takových funkcí „hodně“, neboť tvoří hustou množinu v $C(2\pi)$). □

Poznámka 4.2.3. (a) Vyslovili jsme pouze velmi jednoduchou verzi Banach-Stainhausovy věty; tuto větu není obtížné dále zobecnit.
(b) Celkem snadno lze „špatnou množinu“, pro jejíž body Fourierova řada diverguje, dále zvětšovat v tomto smyslu: lze najít $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, pro kterou Fourierova řada diverguje ve více bodech, např. v bodech nekonečné podmnožiny intervalu $[\,0, 2\pi\,]$. Tato množina může být dokonce hustá typu G_δ v intervalu $[\,0, 2\pi\,]$ a proto nemusí být spočetná, protože hustá G_δ-množina v úplném metrickém prostoru je 2. kategorie (srovnejte např. s [27] nebo s [62]).
(c) Dnes víme, že Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ nemůže divergovat např. ve všech bodech *nedegenerovaného* intervalu: konverguje totiž *skoro všude* ve smyslu Lebesgueovy míry. Tento výsledek, který je řešením velmi dlouho neřešeného problému, náleží L. Carlesonovi. Na druhé straně již r. 1926 dokázal A. N. Kolmogorov (1903 – 1987), že existuje funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada diverguje *ve všech bodech* $\mathbb{R}$. K těmto otázkám se ještě vrátíme.

4.3 Fejérova věta o sčítatelnosti

V této části dokážeme tvrzení, které ukáže cestu, jak se s problémem možné divergence Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ vyrovnat. Pro nás bude v další části výkladu vodítkem pro důkaz modernější verze tvrzení, které je sice starší, avšak trošku složitější; srv. se 13. částí (tj. 2.13) této kapitoly.

Budeme velmi často pracovat s jednostrannými limitami vyšetřovaných funkcí; pro ně budeme užívat standardní označení

$$f(x+) := \lim_{t \to x_+} f(t)\,, \quad f(x-) := \lim_{t \to x_-} f(t)\,.$$

Věta 4.3.1 (Fejér 1904). *Nechť funkce f je z $\mathcal{P}(2\pi)$ a nechť v (pevně zvoleném) bodě $x \in \mathbb{R}$ existují (konečné) jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$. Potom platí*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f,x) = (C)\text{-}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}\,.$$

Je-li navíc funkce f spojitá, průměry

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}$$

konvergují k $f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Pro fixované x ze znění věty položme

$$s(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}\,.$$

Dále si uvědomíme, že jednoduchou substitucí dostaneme

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

S ohledem na vlastnost (b) z Lemmatu 3.3.5 platí (dokonce pro jakékoli číslo z $\mathbb{C}$ na místě $s(x)$)

$$\sigma_n(f,x) - s(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{s(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Rozdíl vyjádříme jediným integrálem a ten pak vyjádříme jako součtet dvou integrálů přes intervaly $(-\pi, 0)$ a $(0, \pi)$; prvý ještě jednoduchou substitucí převedeme na integrál přes interval $(0, \pi)$ a součet vyjádříme jediným integrálem. Dostaneme

$$\sigma_n(f,x) - s(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \big[f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)\big] K_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Výraz v poslední hranaté závorce označíme $\Phi(x,t)$. Z předchozího dostaneme pro $0 < \delta < \pi$

$$\Big|\sigma_n(f,x) - s(x)\Big| \le \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^\delta |\Phi(x,t)| K_n(t) dt + \int_\delta^\pi |\Phi(x,t)| K_n(t) dt\Big)\,.$$

Platí

$$|\,\Phi(x,t)\,| \le |f(x+t) - f(x+)| + |f(x-t) - f(x-)|\,;$$

to nám umožní odhad: Volme $\varepsilon > 0$ libovolně a pak zvolme δ, $0 < \delta < \pi$ tak, aby pro všechna t, $0 < t < \delta$ platilo

$$|\,\Phi(x,t)\,| \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Snadno odhadneme prvý z integrálů

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta |\,\Phi(x,t)\,|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varepsilon}{2} K_n(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dále z Lemmatu 3.3.5 (e) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |\,\Phi(x,t)\,| K_n(t)\,\mathrm{d}t &\le \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |\,\Phi(x,t)\,| \frac{\pi^2}{2(n+1)\,t^2}\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \frac{\pi^2}{2(n+1)}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t)+f(x-t)-2s(x)|\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \frac{\pi}{2(n+1)}\,\frac{2\pi}{\delta^2}\big(\|f\|_1+|s(x)|\big)\to 0\,,\end{aligned}$$

pro $n\to\infty$. Odtud plyne možnost odhadu druhého integrálu rovněž pomocí $\varepsilon/2$ pro všechna $n\ge m$. Pro tato n je tedy

$$|\sigma_n(f,x)-s(x)|<\varepsilon\ .$$

Poslední vzorec plyne z vyjádření Fejérova jádra.. □

Poznámka 4.3.2. Odhady v předchozím důkazu „fungují“ i pro případ, že f je spojitá na nějakém intervalu $[a,b]$ (výjimečně předpokládáme *oboustrannou spojitost* i v koncových bodech a,b). Pak lze tyto odhady provést nezávisle na $x\in[\,a,b\,]$ a konvergence je stejnoměrná na $[\,a,b\,]$. Dokážeme toto tvrzení jiným způsobem pro formálně jednodušší případ $f\in\mathcal{C}(2\pi)$; ponecháme čtenáři k rozmyšlení, jak lze obdržet tvrzení pro obecný interval $[\,a,b\,]$.

Věta 4.3.3 (Fejér 1904). *Nechť funkce f je z $\mathcal{C}(2\pi)$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f,x)=(C)\text{-}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat f(k)e^{ikx}=f(x)\,,$$

přičemž tato konvergence je stejnoměrná, tj. $\sigma_n(f,\cdot\,)\rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Připomeňme nejprve, že ze vzorce (3.10) a z Lemmatu 3.3.5 vyplývá vyjádření

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{2}{(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)(x-u))}{2\sin\big((x-u)/2\big)}\right)^2\mathrm{d}u \tag{4.11}$$

Definujme operátory $L_n : f\mapsto\sigma_n(f,\cdot\,)$ na $\mathcal{C}(2\pi)$. Z (4.11) vidíme, že tyto operátory jsou nezáporné lineární operátory na $\mathcal{C}(2\pi)$, protože $L_nf\in\mathcal{C}(2\pi)$ pro každou $f\in\mathcal{C}(2\pi)$; jsou to totiž trigonometrické polynomy. Nyní stačí dokázat, že

$$\sigma_n(f,x)\rightrightarrows f(x)\quad\text{na}\quad[\,-\pi,\pi\,]\,,$$

což vyhledem k periodicitě dává již požadované tvrzení. Pro důkaz této stejnoměrné konvergence použijeme Lemma 1.8.5. Z Lemmatu 3.3.5 vyplývá

$$L_n1(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(u)\,du=1\,,$$

takže podmínka $L_n1\rightrightarrows 1$ na $[\,-\pi,\pi\,]$ je splněna. Pro $[\,x,t\,]\in[-\pi,\pi\,]\times[-\pi,\pi\,]$ definujeme

$$h(x,t)=1-\cos(x-t)=2\sin^2\big((x-t)/2\big)\,.$$

Zřejmě je $h(x,t)\ge 0$ a $Z(h)=\big\{x\in[\,-\pi,\pi\,];\,\sin\big((x-t)/2\big)=0\big\}$ je množina těch $[\,x,t\,]$, pro něž $x-t=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, přičemž tato množina je podmnožinou diagonály $\Delta(f)$ pro každou funkci $f\in\mathcal{C}([\,-\pi,\pi\,])$, pro niž $f(-\pi)=f(\pi)$. Proto je h omezující funkce pro každou takovou funkci f. Pak je s přihlédnutím k (4.11)

$$\begin{aligned}L_nh_t(x)&=\frac{2}{\pi(n{+}1)}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin^2\big((u-t)/2\big)\left(\frac{\sin((n+1)(x-u))}{2\sin\big((x-u)/2\big)}\right)^2\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{\pi(n{+}1)}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2((n{+}1)(x{-}u))\,du\le\frac{2\pi}{\pi(n{+}1)}=\frac{2}{n+1}\,,\end{aligned}$$

a tedy pro $n \to \infty$ je $L_n h_t(t) \rightrightarrows 0$ na $[-\pi,\pi]$, což dává potřebné předpoklady k aplikaci Lemmatu 1.8.5. Z něj dostáváme $L_n f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$ pro všechny uvažované funkce f. □

Poznámka 4.3.4. Jak jsme již ukázali samotný předpoklad $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ neumožňuje dokázat ani bodovou konvergenci její Fourierovy řady. Otázka jak „velká" může být množina těch $x \in \mathbb{R}$, v nichž řada diverguje, zůstávala po dlouhou dobu otevřeným problémem. L. Carleson r. 1966 dokázal, že například nemůže obsahovat žádný nedegenerovaný interval. Jeho odpověď na zmíněnou otázku byla jen vedlejším výsledkem, dokázal totiž obecnější tvrzení: pro každou funkci $f \in L_2(2\pi)$ konverguje její Fourierova řada skoro všude v $\mathbb{R}$. Tento výsledek později rozšířil R. A. Hunt a Carlesonovou metodou dokázal, že i Fourierova řada každé funkce $f \in L_p(2\pi)$ s $1 < p < \infty$ konverguje skoro všude v $\mathbb{R}$.

Je snadné nahlédnout, že Fourierovy koeficienty Dirichletovy funkce rozšířené z intervalu $(0,2\pi]$ periodicky s periodou 2π na $\mathbb{R}$ (pozor, toto rozšíření není Dirichletova funkce na $\mathbb{R}$!) jsou tytéž jako pro funkci rovnou identicky 0. Součet příslušné Fourierovy řady je rovněž identicky nulová funkce, která se od rozvíjené Dirichletovy funkce (je v $L_p(2\pi)$ pro všechna $p \in [1,\infty)$) liší na množině Lebesgueovy míry 0; tato množina je hustá v $\mathbb{R}$.

Důsledek 4.3.5 (Weierstrass 1885). *Pro každé $\varepsilon > 0$ a pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ existuje trigonometrický polynom T takový, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je*

$$|\, f(x) - T(x)\,| < \varepsilon\,.$$

Tvrzení z tohoto Důsledku 4.3.5 plyne z Fejérovy věty: Dokázali jsem, že $\sigma_n(f,\cdot) \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$ a $\sigma_n(f,\cdot)$ jsou trigonometrickými polynomy.

4.4 Konvergence Fourierovy řady

O důkaz bodové konvergence Fourierovy řady se pokusili L. A. Cauchy (1789 – 1857) a S. D. Poisson (1781 – 1840), avšak jejich důkazy nebyly uspokojivé. První skutečný důkaz takového tvrzení pro *po částech monotónní funkci s konečně mnoha nespojitostmi 1. druhu* (*jednostranné limity funkce v těchto bodech existují*) $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ podal r. 1829 P. G. L. Dirichlet (1805 – 1859). Popisoval tyto funkce pomocí množiny lokálních extrémů a věřil, že jeho důkaz bude možno přizpůsobit obecnější situaci. Dokážeme o trochu obecnější tvrzení, avšak dříve dokážeme tzv. *Riemannův lokalizační princip.* K tomu budeme potřebovat dvojici technických lemmat.

První tvrzení, které nyní budeme dokazovat, je jistým vylepšením již dříve dokázaného Riemann–Lebesgueova lemmatu:

Lemma 4.4.1. *Nechť $f,g \in \mathcal{P}(2\pi)$, přičemž funkce g je omezená na $\mathbb{R}$. Potom*

$$\lim_{|n|\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,e^{int}\,\mathrm{d}t \,= 0 \tag{4.12}$$

stejnoměrně vzhledem k $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka 4.4.2. Funkce $t \mapsto f(x-t)g(t)$ je z $\mathcal{P}(2\pi)$, takže Důsledek 2.4.2 nám dává *bodovou* konvergenci, tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$; přínosem dokazovaného Lemmatu 4.4.1 je tedy stejnoměrnost této konvergence.

Důkaz. Zvolme číslo M tak, aby $|g(t)| \le M < \infty$ pro *všechna* $t \in \mathbb{R}$. Ve Větě 3.2.6 jsme dokázali pomocí látky z teorie integrálu, že pro $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$, je nejenom $\mathcal{T} \subset\subset \mathcal{L}_2(2\pi)$, ale že $\mathcal{T}$ je i *hustý podprostor* $\mathcal{L}_p(2\pi)$, speciálně i pro $p = 1$ [1]).

[1]) Jde o hustotu *v prostoru* $\mathcal{L}(2\pi)$ s integrální metrikou, definovanou pomocí normy prostoru $\mathcal{L}(2\pi)$.

Odtud plyne existence trigonometrického polynomu T takového, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a všechna x platí

$$\begin{aligned} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \Big| &\le \\ \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-T(x-t)| \cdot |g(t)|\,|e^{int}|\,\mathrm{d}t &\le \\ \le M \int_{-\pi}^{\pi} |f(u) - T(u)|\,\mathrm{d}u = M\|f-T\|\,, \end{aligned}$$

přičemž výraz vpravo můžeme volbou T udělat menší než $\varepsilon/2$ pro zvolené ε (použili jsme omezení $|g(t)| \le M$ a rovnosti $|e^{int}| = 1$).

Protože je

$$\begin{aligned} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,e^{int}\,\mathrm{d}t \Big| \le \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \Big| + \\ + \Big| \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \Big|\,, \end{aligned}$$

stačí ukázat, že rovněž výraz

$$\Big| \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \Big| \tag{4.13}$$

umíme volbou dostatečně velké hodnoty $|n|$ udělat také menší než $\varepsilon/2$. Předpokládejme, že T je stupně m, tj.

$$T(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt}\,.$$

Výraz v (4.13) postupně odhadneme:

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)\,g(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \Big| = \\ &= \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k=-m}^{m} c_k\,\mathrm{e}^{ik(x-t)} \Big) g(t)\,e^{int}\,\mathrm{d}t \Big| \le \sum_{k=-m}^{m} |c_k| \cdot \big|\mathrm{e}^{ikx}\big| \cdot \Big| \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{e}^{-i(k-n)t}\,\mathrm{d}t \Big| = \\ &= \sum_{k=-m}^{m} |c_k| \Big| \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{-i(k-n)t}\,\mathrm{d}t \Big| = \sum_{k=-m}^{m} |c_k|\,|\widehat{g}(k-n)|\,. \end{aligned}$$

Jelikož podle Důsledku 2.4.2 jde o konečnou lineární kombinaci posloupností konvergujících k 0, tento výraz pro $|n| \to \infty$ také konverguje k 0; lze ho tedy pro velká $|n|$ odhadnout pomocí $\varepsilon/2$, což spolu s předchozím odhadem dává žádané tvrzení. □

Důsledek 4.4.3. *Nechť $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$, přičemž funkce g je omezená na $\mathbb{R}$. Potom*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\cos nt\,\mathrm{d}t \rightrightarrows 0\,, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\sin nt\,\mathrm{d}t \rightrightarrows 0\,, \tag{4.14}$$

přičemž tato konvergence je stejnoměrná vzhledem k $x \in \mathbb{R}$.

Díky zavedení Dirichletova jádra v (3.9) lze n-tý částečný součet $s_n(f,x)$ Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ v bodě x zapsat ve tvaru

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t\ . \tag{4.15}$$

Ukážeme, že s *malou chybou* lze tento integrál zjednodušit. Přesněji, platí následující lemma:

Lemma 4.4.4. *Nechť funkce $f \in$ a číslo $0 < \delta \leq \pi$ jsou pevně zvoleny. Potom*

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \big(f(x-t) + f(x+t)\big) \frac{\sin nt}{t} dt + \varepsilon_n(x)\,, \tag{4.16}$$

kde funkce ε_n *definované vztahem* (4.16) *závisejí na volbě* f *a* δ*, avšak vzhledem k proměnné* x *je*

$$\varepsilon_n(x) \rightrightarrows 0 \quad na \ \ \mathbb{R}\,. \tag{4.17}$$

Speciálně je $\varepsilon_n' \to 0$ *pro*

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin nt}{t}\, \mathrm{d}t\, + \varepsilon_n'\,, \tag{4.18}$$

kde ε_n' *závisejí na* δ *a jsou určeny rovností* (4.18).

Důkaz. Budeme postupně několikrát užívat předcházejícího tvrzení. Předně podle Tvrzení 3.3.3 (a) platí

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, \frac{1}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin nt\, \mathrm{d}t\, + \alpha_n(x)\ ,$$

kde

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t\ ,$$

což opět plyne z téhož tvrzení. Dále platí

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t}\right) = 0\,,$$

což dokážeme např. užitím Taylorových rozvojů funkcí: pro $t \to 0$ je

$$\frac{1}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t} = \frac{t\cos(t/2) - 2\sin(t/2)}{2t\sin(t/2)} = \frac{t + o(t^2) - t + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} =$$
$$= \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(t^2)/t^2}{1 + o(t^2)/t^2} \to 0\,.$$

Označme nyní $g_1(t)$ limitovou funkci pro $0 < |t| < \pi$, $g_1(0) = g_1(\pi) = 0$, rozšířenou 2π-periodicky na $\mathbb{R}$. Je to omezená funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$, která je s výjimkou lichých násobků π dokonce spojitá. Je tedy

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, \frac{\sin nt}{t}\, \mathrm{d}t\, + \beta_n(x) + \alpha_n(x)\,,$$

kde

$$\beta_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g_1(t) \sin nt\, \mathrm{d}t\ .$$

Konečně (δ je pevně zvoleno) položme g_2 rovno 2π-periodické funkci na $\mathbb{R}$, která vznikne jako 2π-periodické rozšíření funkce

$$g_2(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{pro} \quad \delta \leq |t| < \pi \\ 0 & \text{pro} \quad |t| < \delta, \quad \text{a} \quad t = \pi \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$. Platí tedy konečně

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\, \frac{\sin(nt)}{t} dt + \gamma_n(x) + \beta_n(x) + \alpha_n(x)\,,$$

kde

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g_2(t) \sin(nt) dt$$

a $g_2 \in \mathcal{P}(2\pi)$. Protože $\alpha_n(x)+\beta_n(x)+\gamma_n(x) \to 0$ pro $|n| \to \infty$ podle předchozího Lemmatu 4.4.1, lze jejich součet označit $\varepsilon_n(x)$ a tvrzení je dokázáno, neboť zbytek je důsledkem rozdělení intervalu $(-\delta, \delta)$ na intervaly $(-\delta, 0)$ a $(0, \delta)$. □

Tím máme připraveno vše pro tzv. Riemannův lokalizační princip. Tím se rozumí následující tvrzení:

Věta 4.4.5 (Riemannův lokalizační princip). *Nechť je dána dvojice funkcí $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(2\pi)$ a nechť*

$$f_1(x) = f_2(x)\,, \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,,$$

kde I je neprázdný otevřený interval v $\mathbb{R}$. Potom pro částečné součty Fourierových řad platí

$$\lim_{n\to\infty} |\, s_n(f_1, x) - s_n(f_2, x)\, | = 0$$

pro všechna $x \in I$. Tato konvergence je lokálně stejnoměrná na I (tj. stejnoměrná na každém uzavřeném $J \subset I$).

Důkaz. Zvolme uzavřený neprázdný interval $J \subset I$. Pak zvolíme δ, $0 < \delta < \pi$, a to tak, aby bod $x + t$ ležel v I pro každé $x \in J$ a každé t, $0 < |t| \le \delta$. Definujeme-li $f = f_1 - f_2$, dostáváme v (4.16) nulový integrál, takže platí

$$s_n(f, x) = s_n(f_1, x) - s_n(f_2, x) = \varepsilon_n(x) \to 0$$

stejnoměrně pro všechna $x \in J$. □

Poznámka 4.4.6. Riemannův lokalizační princip ukazuje, že o konvergenci Fourierovy řady rozhoduje „lokální chování" rozvíjené funkce a v jakém smyslu: změnou funkce ve „vzdálených" bodech lze samozřejmě dosáhnout změny koeficientů, nikoli však konvergence ve vyšetřovaném bodě, pokud Fourierova řada v tomto bodě diverguje.

Pro bodovou konvergenci Fourierových řad existuje celá řada kritérií. Předtím, než se dostaneme ke kritériu pro nás nejdůležitějšímu, budeme muset zavést některé další pojmy. Pro některá tato potřeba téměř nevzniká, proto se s nimi seznámíme.

Věta 4.4.7. *Nechť jsou dány funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, číslo δ, $0 < \delta \le \pi$, a množina $X \subset \mathbb{R}$. Položme*

$$\Phi(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\,. \tag{4.19}$$

Předpokládejme, že pro všechna $x \in X$ je

$$|f(x)| \le M < \infty\;.$$

Potom pro částečné součty Fourierovy řady platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f, x) = f(x) \text{ stejnoměrně na } X\,,$$

právě když platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\Phi(x,t)}{t} \sin nt \,\mathrm{d}t \; = 0 \tag{4.20}$$

stejnoměrně na množině X.

Důkaz. Z (4.15) a (4.16) plyne

$$
\begin{aligned}
s_n(f,x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t + \varepsilon_n(x) - \\
&- \frac{1}{\pi}\int_0^\delta 2f(x)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt - \varepsilon'_n f(x) = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\Phi(x,t)}{t}\,\sin nt\,\mathrm{d}t + \big(\varepsilon_n(x) - \varepsilon'_n f(x)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Jelikož $|f(x)| \le M < \infty$, $x \in X$, konverguje výraz v závorce stejnoměrně k 0 na X. Proto $s_n(f,x) \rightrightarrows f(x)$ na X, právě když platí

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\Phi(x,t)}{t}\,\sin nt\,\mathrm{d}t \rightrightarrows 0 \quad \text{na} \quad X\,;
$$

tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 4.4.8 (Dini 1872). *Nechť funkce f je z $\mathcal{P}(2\pi)$ a nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Nechť dále existuje δ, $0 < \delta \le \pi$ tak, že*

$$
\int_0^\delta \frac{|\Phi(x_0,t)|}{t}\,\mathrm{d}t < \infty \tag{4.21}
$$

(kde funkce Φ je určena vzorcem (4.19)). Potom je

$$
\lim_{n\to\infty} s_n(f,x_0) = f(x_0)\ ,
$$

tj. Fourierova řada funkce f konverguje k f v bodě x_0.

Důkaz. Volme $X = \{x_0\}$. Pak z (4.21) a Riemann-Lebesgueova lemmatu, aplikovaného na funkci g,

$$
g(t) = \begin{cases} \Phi(x_0,t)/t & \text{pro} \quad 0 < t < \delta\ , \\ 0 & \text{všude jinde}\ , \end{cases}
$$

dává (4.21) informaci o tom, že $g \in L_1(\mathbb{R})$ a tedy pro $n \to \infty$

$$
\int_0^\delta \frac{\Phi(x_0,t)}{t}\,\sin nt\,\mathrm{d}t \to 0
$$

na $X = \{x_0\}$, takže z předešlého dostáváme tvrzení. □

Důsledek 4.4.9. (a) Je-li $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí

$$
|f(x_0+t) - f(x_0)| \le M\,|t|^\alpha\,, \quad 0 < |t| < \delta\,,
$$

pro jistá α, δ, M, $0 < \alpha$, δ, $M < \infty$, která nezávisejí na t, pak pro $n \to \infty$ je

$$
s_n(f,x_0) \to f(x_0)\,.
$$

Je totiž

$$
\frac{|\Phi(x_0,t)|}{t} \le 2Mt^{\alpha-1}\,, \quad 0 < t < \delta\,.
$$

Speciálně to platí pro funkce, kterým se u nás často říká *α-hölderovské funkce* a které vyhovují nerovnosti

$$
|\varphi(x) - \varphi(y)| \le M\,|x-y|^\alpha\,.
$$

Poznamenejme, že v souvislosti s Fourierovými řadami se jimi pro $0 < \alpha \le 1$ zabýval r. 1864 R. Lipschitz (1832 – 1903); třídy těchto funkcí se uplatnily při řešení mnoha matematických problémů. Lipschitz tak byl první, kdo se dokázal zbavit omezujících předpokladů, vyskytujících se v Dirichletově kritériu (konečnost množin bodů, v nichž se nabývá extrémů, konečnost množiny bodů nespojitosti). Přispěl také k položení základu k teorii nekonečných množin, na který navázal G. Cantor (1845 – 1920).
(b) Je-li $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a existují (vlastní) $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$, pak pro $n \to \infty$ je

$$
s_n(f,x_0) \to f(x_0)\,.
$$

K tomu stačí volit $\alpha = 1$ a $M < \infty$ tak, že

$$
\max\{f'_+(x_0), f'_-(x_0)\} < M,
$$

a užít toho, co jsme již ukázali v předchozím bodě (a). Speciálně to platí „v intervalu konvexity“ funkce f.

4.5 Dirichletova věta

Pokusíme se částečně objasnit, jak P. G. L. Dirichlet (1805 – 1859) dospěl r. 1829 k prvé významnější větě o bodové konvergenci Fourierovy řady. Dirichlet byl velmi talentovaný *německý* matematik (výjimečně to zdůrazňujeme, bývá totiž někdy kvůli křestním jménům považován za Francouze), který v 17 letech odešel studovat do Paříže. Zde se seznámil se soudobou francouzskou matematikou a mnoha význačnými matematiky. V Paříži se setkal mj. i s Abelem, ale také s Fourierem, jehož práce o (Fourierových) řadách ho zaujaly. Svoji práci publikoval ve 23 letech.

Předpokládejme nejprve, že $f \in \mathcal{C}(2\pi)$. V přípravných úvahách je vhodné si uvědomit, že ve Fourierově době byly představy o integrálu ještě velmi mlhavé. Upozorníme vždy, kde a jaké předpoklady hrají svoji důležitou roli.

Budeme opět pracovat s Dirichletovým jádrem D_n; viz Tvrzení 3.3.3. Pomocí něj lze částečný součet $s_n(f,x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x vyjádřit ve tvaru (potřebujeme tedy zaručit existenci příslušného integrálu a pro druhou rovnost potřebujeme 2π-periodicitu f)

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}(x-t)\right)}{2\sin\left(\dfrac{x-t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\ .$$

Integrál rozdělíme na integrál přes interval $(x-\pi, x)$ a na integrál přes interval $(x, x+\pi)$. V prvním provedeme substituci $t = x - 2u$, ve druhém substituci $t = x + 2u$. Dostaneme tak vyjádření

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x-2u)\frac{\sin(2n+1)u}{2\sin u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x+2u)\frac{\sin(2n+1)u}{2\sin u}\,\mathrm{d}u\ .$$

Až dosud lze shrnout „přirozené nároky“ na předpoklady tak, že pro určení koeficientů potřebujeme *integrabilitu* f k výpočtu integrálů, jimiž jsou definovány Fourierovy koeficienty; využili jsme také periodicitu f při posunu integračního oboru a také jsme prováděli substituci. Nějakou formu věty o substituci čtenář patrně zná, patrně pro Lebesgueův integrál. Vyjádření lze ještě upravit:

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big(f(x-2u) + f(x+2u)\big)\frac{\sin(2n+1)u}{2\sin u}\,\mathrm{d}u\ , \tag{4.22}$$

Je dobré si povšimnout, že výraz nezávisí na hodnotě $f(x)$, závisí však globálně na hodnotách f v *celém* intervalu $(x-\pi, x+\pi)$. Přitom bychom rádi dokázali, že

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = \lim_{n\to\infty}\big(f_n^-(x) + f_n^+(x)\big)\ ,$$

kde $f_n^-(x)$ je „polovina“ integrálu (4.22) bez $f(x+2u)$ a $f_n^+(x)$ je „druhá polovina“ integrálu (4.22) bez $f(x-2u)$. Až sem prakticky došel i Fourier, avšak Dirichlet dospěl dále: povšiml si, že „příspěvek k hodnotě integrálů“ závisí *podstatně více* na chování f v blízkosti x, nežli na chování v bodech vzdálenějších. Dirichlet si také jako první uvědomil, jak je nutno pracovat s nespojitými funkcemi. V nepřesné rovině lze jeho úvahu popsat, např. pro $f_n^+(x)$, takto:

$$\begin{aligned} f_n^+(x) &\approx \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/(2n+1)} f(x+2u)\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)}\,\mathrm{d}u \approx \\ &\approx \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} f\Big(x + \frac{\pi}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2} f\Big(x+\frac{\pi}{2n+1}\Big)\ . \end{aligned}$$

Pro velká n jsou tyto hodnoty blízké $f(x+) = \lim_{t\to x_+} f(t)$, pokud *tato limita existuje*. Další Dirichletova úvaha spočívala v tom, že chtěl mít eventuální nespojitosti „oddělené“ (po částech spojitá funkce) a také „kontrolu“ nad znamením $f(t) - f(x)$ (funkce po částech monotonní). Připomínáme, že slovním spojením „po částech“ se opět myslí existence takového dělení $D = \{-\pi = x_0 < \cdots < x_m = \pi\}$ intervalu $[-\pi, \pi]$, že vyšetřovaná funkce je spojitě rozšiřitelná na každý dělící interval $[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, \ldots, m$ a je na něm monotónní. Dospěl tak posléze k tvrzení:

Věta 4.5.1 (Dirichlet 1829). *Nechť funkce f je omezená, po částech spojitá a po částech monotónní funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$. Předpokládejme dále, že f je 2π-periodická na $\mathbb{R}$ a že platí*

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Jsou-li čísla a_k, b_k Fourierovými koeficienty f, tj. platí (2.13) *pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a definitoricky dle úmluvy $b_0 = 0$, pak platí rovnost*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, neboli Fourierova řada funkce f konverguje k f.

Předcházející poněkud filozofický výklad má nejenom motivační charakter, ale měl by čtenáři napomoci se zorientovat, k čemu a jakými prostředky se pomocí níže uvedených lemmat chceme dostat. Dospějeme k obecnějšímu a elegantnějšímu tvrzení, než je Věta 4.5.1, bez předchozího výkladu by však mohlo být obtížné roli jednotlivých předpokladů pochopit.

Historická poznámka 4.5.2. Kritické hodnocení vývoje pro některé matematické oblasti dodnes chybí, ale to není případ Fourierových řad nebo obecněji *harmonické analýzy*; viz např. článek [76], nebo knihy [1] a [57]. Jim jsou poplatné historické komentáře v tomto textu. Zhodnoťme ještě Dirichletův výsledek pohledem [57].

Jestliže považujeme Dirichletovo kritérium a jeho důkaz za první dostatečně přesné s ohledem na dnešní měřítka, je třeba se zmínit i o jejich drobných nedostatcích. Jak jsme viděli, je předpoklad „monotonie po částech“ (tedy v intervalech nějakého dělení) zbytečně silný. Totéž lze říci o předpokladu konečnosti množiny bodů nespojitosti. Omezenost je naopak přirozená vzhledem k použitému integrálu. Někdy se uvádí, že Dirichlet byl přesvědčen, že jeho důkaz „projde“ i v případě, že počet intervalů monotonie je nekonečný, avšak dle [57] měl Dirichlet na mysli *jiný* důkaz (psal o tom v dopise K. F. Gaussovi). Bohužel však Dirichlet nikdy žádný další důkaz nepublikoval, a tak prvním, kdo se dokázal zmíněného technického předpokladu zbavit, byl patrně Lipschitz (viz ještě níže).

Dalším nedostatkem, který byl v Dirichletově práci shledán, byl fakt, že použil výsledek

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \tag{4.23}$$

který nedokazoval. Drichlet si však byl patrně vědom této slabiny, neboť v později publikovaném důkaze tuto pasáž předělal. My si tohoto integrálu všimneme podrobněji.

Příklad 4.5.3. K výpočtu hodnoty integrálu (4.23) nestačí zcela elementární úvahy. Nejde o integrál, který by existoval v Riemannově smyslu, neboť integrujeme přes neomezený interval $(0, \infty)$. Mohli bychom ho vyšetřovat jako nevlastní Riemannův integrál nebo integrál Newtonův, avšak primitivní funkci F k funkci $(\sin t)/t$ na intervalu $(0, \infty)$ nelze vyjádřit pomocí „elementárních funkcí“. Přesto není obtížné zdůvodnit, že obě limity $\lim_{t\to 0+} F(t)$ a $\lim_{t\to\infty} F(t)$ existují a jsou vlastní. Odtud plyne existence $M \in \mathbb{R}$ takového, že $|F| < M$. Pro libovolnou dvojici čísel a, b, $0 \le a < b \le \infty$ tedy platí

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \right| \le 2M\,. \tag{4.24}$$

Integrál (4.23) patří k těm, na nichž se často ilustruje existence Newtonova integrálu i v případě, že integrál nakonverguje absolutně, a tedy neexistuje v Lebesgueově smyslu. K důkazu existence Newtonova integrálu v (4.23) můžeme ostatně použít Dirichletovo kriterium; jde o standardní ilustrativní příklad. Poznamenejme ještě, že odhad (4.24) lze vcelku snadno zpřesnit: vyjádříme-li integrál v (4.23) jako součet integrálů přes intervaly $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k = 0, 1, \dots$, jde o řadu se střídavými znaménky, přičemž absolutní hodnoty jejích členů konvergují *monotónně* k 0. Stačí tedy nalézt odhad prvního členu řady.

Tvrzení 4.5.4. *Nechť $f \in \mathrm{BV}(2\pi)$. Potom platí*

$$|n\widehat{f}(n)| \le \frac{1}{4} V_0^{2\pi} f$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Odhad zřejmě platí pro $n = 0$. Nechť $k, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Potom substitucí $u = t + k\pi/n$ dostaneme

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\Big(t + \frac{k\pi}{n}\Big)\, e^{-int}\, e^{-ink\pi/n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\Big(t + \frac{k\pi}{n}\Big)\, e^{-int} dt\ .\end{aligned}$$

Odtud dostaneme sečtením s obdobnou rovností pro $k - 1$

$$2\widehat{f}(n) = \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[f\Big(t + \frac{k\pi}{n}\Big) - f\Big(t + \frac{(k-1)\pi}{n}\Big)\Big] e^{-int} dt\ .$$

Nyní volbou vhodných k dostaneme $2|n|$ rovnic, které sečteme a upravíme na tvar

$$4|n\hat{f}(n)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2|n|} \Big| f\Big(t + \frac{k\pi}{n}\Big) - f\Big(t + \frac{(k-1)\pi}{n}\Big)\Big|\,\mathrm{d}t\ .$$

Integrand je shora odhadnut číslem $V_0^{2\pi} f$, z čehož plyne dokazované tvrzení. □

Věta 4.5.5 (Dirichlet 1829, Jordan 1881). *Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a nechť $[\,a, b\,]$ je nedegenerovaný interval v $\mathbb{R}$ takový, že $f \in \mathrm{BV}([\,a, b\,])$. Potom pro všechna $x \in (a, b)$ platí*

$$s(f, x) = \lim_{n\to\infty} s_n(f, x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}\ . \tag{4.25}$$

Je-li navíc $I \subset (a, b)$ uzavřený interval a $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$, potom

$$s_n(f, \cdot\,) \rightrightarrows f \quad na \quad I\ .$$

Speciálně pro spojitou funkci $f \in \mathrm{BV}(2\pi)$ dostáváme $s_n(f, \cdot\,) \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Díky Větě 1.6.5 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že funkce f je neklesající na $[\,a, b\,]$. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Dále zvolme $x \in (a, b)$ a položme

$$2s(x) := f(x+) + f(x-)\,;$$

z Věty 1.6.5 vyplývá, že tyto limity existují pro každé $x \in (a, b)$. Též je

$$f(x+t) + f(x-t) - 2s(x) = \big[f(x+t) - f(x+)\big] + \big[f(x-t) - f(x-)\big]\,, \tag{4.26}$$

kde v hranatých závorkách na pravé straně rovnosti při libovolně, avšak pevně zvoleném x, stojí monotónní funkce v proměnné t, jejichž limita pro $t \to 0+$ je rovna 0. Zvolme nyní δ, $0 < \delta < \pi$, tak, aby jednak $\{x + t\,;\, |t| < \delta\} \subset (a, b)$ a zároveň aby pro všechna tato t platilo

$$|f(x+t) - f(x+)| < \varepsilon\,, \quad |f(x-t) - f(x-)| < \varepsilon\,; \tag{4.27}$$

tento moment volby δ označme $(*)$. Ve Větě 4.4.4 jsme dokázali rovnost (4.16)

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \big(f(x-t)+f(x+t)\big)\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ + \varepsilon_n(x)\,,$$

kde funkce ε_n závisely pouze na volbě f a δ, $0<\delta\le\pi$, a pro $n\to\infty$ platilo $\varepsilon_n(x)\rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Speciálně z rovnosti (4.18), tj.

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ + \varepsilon_n'\,,$$

kde pro $n\to\infty$ je $\varepsilon_n'\to 0$, dostaneme

$$s(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta 2s(x)\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ + \varepsilon_n'\,, \tag{4.28}$$

Z obou rovností (4.16), (4.28) tak dostáváme

$$\begin{aligned}|s_n(f,x)-s(x)| \le{}& \Big|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+t)-f(x+))\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\Big| + \\ &+ \Big|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x-t)-f(x-))\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ \Big| + \varepsilon_n^*(x)\,,\end{aligned} \tag{4.29}$$

přičemž $\varepsilon_n^*(x)\rightrightarrows 0$ pro $n\to\infty$. Důkaz nyní dokončíme tak, že ukážeme, jak lze odhadnout oba výrazy na pravé straně nerovnosti v závislosti na zvoleném $\varepsilon>0$.

Odhad integrálů provedeme pomocí druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu: viz např. [35], Věta 101. Její elementární verzi jsme použili v souvislosti s Dirichlet-Abelovým kritériem pro konvergenci integrálů; viz [69], Věta 10.6.6. Ve znění pro Lebesgueův integrál v [35] říká:

Věta. *Nechť* $f\in L_1((c,d))$ *a nechť* g *je konečná monotónní na* $[\,c,d\,]\subset\mathbb{R}$. *Potom existuje* $\zeta\in[\,c,d\,]$ *tak, že platí*

$$\int_c^d f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ = g(c)\int_c^\zeta f(t)\,\mathrm{d}t\ + g(d)\int_\zeta^d f(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.30}$$

Větu použijeme v intervalu $[\,0,\delta\,]$ a na každý integrál v (4.29) zvlášť. Zde se ukazuje klíčovým odhad pro integrál z funkce $(\sin t)/t$. Pro vhodně zvolené ζ, $0<\zeta<\delta$, platí podle (4.30)

$$\begin{aligned}&\int_0^\delta \big(f(x+t)-f(x+)\big)\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ = \\ &= 0\cdot\int_0^\zeta \frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ + \big((f(x+\delta)-f(x+)\big)\cdot\int_\zeta^\delta \frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ ,\end{aligned}$$

a protože první člen v rovnosti vpravo je nulový, dostaneme

$$\Big|\int_0^\delta \big(f(x+t)-f(x+)\big)\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\Big| \le \big|f(x+\delta)-f(x+)\big|\cdot\Big|\int_\zeta^\delta \frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Zcela analogicky s vhodným $0<\zeta'<\delta$ dostaneme

$$\begin{aligned}&-\int_0^\delta \big(f(x-)-f(x-t)\big)\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ = \\ &= -\,0\cdot\int_0^{\zeta'} \frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ - \big((f(x-)-f(x-\delta_1)\big)\cdot\int_{\zeta'}^\delta \frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\ ,\end{aligned}$$

z čehož získáme podobný odhad

$$\Big|\int_0^\delta \big(f(x-t)-f(x-)\big)\,\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\Big| \le \big|f(x-\delta)-f(x-)\big|\cdot\Big|\int_{\zeta'}^\delta \frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Z rovnosti (4.29) a obou provedených odhadů získáme odhad

$$|s_n(f,x) - s(x)| \leq 4\pi\varepsilon + \varepsilon_n^*, \tag{4.31}$$

z čehož již plyne dokazované tvrzení pro bodovou konvergenci v (a,b).

Jestliže je funkce f navíc spojitá v $[a,b]$, je na tomto intervalu i *stejnoměrně spojitá*. Proto v okamžiku volby δ, který jsme označili $(*)$, lze volit toto δ tak, že je $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$ jakmile $|t - t'| < \delta$, $t, t' \in [a,b]$; zároveň lze toto δ volit tak, že $\{x + t\,;\, x \in I,\ |t| < \delta\} \subset (a,b)$. Tím dosáhneme stejnoměrnosti vzhledem k $x \in I$ ve vztahu (4.31) a dokážeme i druhou část tvrzení. □

4.6 Operace s Fourierovými řadami

Není obtížné si uvědomit, že zobrazení $f \to \widehat{f}$ je lineární, zkoumáme-li je ve vhodném kontextu; alespoň pro jeden speciální případ se k tomuto problému vrátíme v následující kapitole. Jde však o jiný problém: lze, eventuálně za jakých okolností, Fourierovu řadu derivovat nebo integrovat „člen po členu“. Motivací k této otázce je srovnání s mocninnými řadami, kde výsledek je vcelku jednoduchý a obecně známý. Derivováním se konvergence Fourierovy řady „značně zhoršuje“, což ukážeme na historickém Weierstrassově příkladu spojité nediferencovatelné funkce. S integrací je to obráceně: že je to užitečné, ukážeme na příkladu Riemannovy sčítací metody (oba výsledky byly předmětem jednoho z proseminářů).

Již jsme se zmínili o rozdílu mezi funkcemi, které lze vyjádřit jako součty mocninných a trigonometrických řad. Připojme ještě jednu historickou ukázku: K. Weierstrass (1815 – 1897) sestrojil spojitou funkci, o které dokázal, že nemá derivaci v žádném bodě $\mathbb{R}$. Zatímco funkce, které jsou (lokálně) *součtem mocninné řady*, jsou všude nekonečně diferencovatelné, tato „patologická“ funkce je definována je součtem speciální *Fourierovy řady*. Pro Fourierovy řady je tato ukázka málo významná, ukazuje však jejich řádově podstatnější složitost.

Ukázku uvedeme delším citátem z Weirstrassovy práce [71], v níž je tato řada popsána [2]). Weierstrassův zájem o spojité nikde diferencovatelné funkce souvisel s jeho přednáškami.

Donedávna se obecně věřilo, že jednoznačná spojitá funkce reálné proměnné má derivaci, jejíž hodnota není definována nebo je nekonečná pouze v některých izolovaných bodech. Dokonce ani v pracích G a u s s e, C a u c h y h o, D i r i c h l e t a, matematiků zvyklých silně kritizovat vše z jejich oboru, nenalezneme, alespoň pokud vím, známku jiného mínění [3]*). Jak jsem se dozvěděl od posluchačů, R i e m a n n byl první, kdo vyjádřil přesvědčení (r. 1861, nebo snad ještě dříve), že toto tvrzení neplatí např. pro funkci vyjádřenou nekonečnou řadou*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}\,.$$

Riemann bohužel důkaz nepublikoval a zdá se, že nebyl zachován ani v jeho poznámkách ani formou ústního podání. Tím více je mi líto, že jsem se ani jedenkrát s jistotou nedozvěděl, jak přesně se Riemann o tomto příkladu vyjádřil. Matematici, kteří se po seznámení s touto Riemannovou domněnkou problémem zabývali, byli (přinejmenším většina z nich) toho názoru, že stačí dokázat existenci funkce, pro kterou v libovolně malém intervalu existuje bod, v němž není funkce diferencovatelná. Že existuje funkce s touto vlastností [4]*) se dokáže velice snadno, a proto věřím, že Riemann měl na mysli takovou funkci, která nemá v ž á d n é m b o d ě derivaci. Důkaz toho, že uvažovaná trigonometrická řada definuje takovou funkci, se mi zatím zdá poněkud těžký; je však lehké sestrojit spojitou funkci reálné proměnné x, pro kterou lze dokázat jednoduchými prostředky, že nemá v žádném bodě derivaci.*

[2]) Weierstrass o ní referoval v Berlínské akademii r. 1872, poprvé se objevila v tisku r. 1875.

[3]) Zde má Weierstrass na mysli všeobecné akceptování tvrzení, které r. 1806 „dokázal“ A.-M. Ampère (1775 – 1836), a to že spojitá funkce má derivaci všude až na konečnou množinu.

[4]) Komentář: Již taková funkce poslouží jako protipříklad k uvedené „Ampèrově větě“. Takovou funkci mohl Riemann snadno sestrojit jako „neurčitý integrál“ k funkci nespojité v bodech husté podmnožiny intervalu $[a,b]$; takovou funkcí je např. tzv. Riemannova funkce.

Weierstrass definuje tuto funkci jako součet řady (označení je nepodstatně modifikováno)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)\,, \tag{4.32}$$

kde $0 < a < 1$ a b je liché číslo takové, že $ab > 1 + 3\pi/2$. Idea Weierstrassova důkazu je taková: pro libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a každé $\delta > 0$ je „diferenční podíl“

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

neomezený na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Volba $0 < a < 1$ zaručuje stejnoměrnou konvergenci řady (4.32). Parametr b „zajišťuje“ potřebnou neomezenost. Jsme tedy vedeni k vyšetřování výrazu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0}\,,$$

přičemž princip „triku“ je založen na tom, že

(a) pro dané b a x_0 a $n \in \mathbb{N}$ vždy existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$1 \le |m - b^n x_0| < 3/2\,, \tag{4.33}$$

(b) a pro x_1, pro něž $b^n x_1 = m$, mají $\cos(b^n \pi x_1)$ a $\cos(b^n \pi x_0)$ opačná znaménka. Pomocí součtového vzorce pro cos snadno dostaneme

$$\begin{aligned}\cos(b^n \pi x_1) - \cos(b^n \pi x_0) &= \cos(\pi m) - \cos(\pi m + \pi(b^n x_0 - m)) = \\ &= (-1)^m [\,1 + \cos(\pi(b^n x_0 - m - 1))\,]\,,\end{aligned}$$

přičemž pro člen v hranaté závorce platí

$$1 + \cos(\pi(b^n x_0 - m - 1)) \ge 1\,.$$

Jestliže je b *liché* celé číslo a $k > m$, potom

$$\begin{aligned}\cos(b^k \pi x_1) - \cos(b^k \pi x_0) &= \cos(b^{k-n} \pi m) - \cos(b^k \pi x_0) = \\ &= (-1)^m [\,1 + \cos(b^{k-n} \pi(b^n x_0 - m - 1))\,]\,,\end{aligned}$$

přičemž nyní pro člen v hranaté závorce platí

$$1 + \cos(b^{k-n} \pi(b^n x_0 - m - 1)) \ge 0\,.$$

Ze čtyř předcházejících rovností vyplývá, že sčítanci ve vyjádření

$$\sum_{k=n}^{\infty} a^k \left(\cos(b^k \pi x_1) - \cos(b^k \pi x_0)\right)$$

mají stejné znaménko a n-tý sčítanec má absolutní hodnotu alespoň a^n, takže je

$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0}\Big| \ge \frac{a^n}{|x_1 - x_0|}\,.$$

Nahradíme-li m v rovnosti (4.33) výrazem $b^n x_1$, dostaneme

$$|x_1 - x_0| \le \frac{3}{2b^n}\,. \tag{4.34}$$

Zvolíme-li dostatečně velké n tak, že $3/2b^n < \delta$, je x_1 v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Odhad shora pro $|x_1 - x_0|$ dává spolu s rovnicí (4.34)

$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0}\Big| \ge \frac{2}{3}(ab)^n\,.$$

Pokud je ab větší než 1, můžeme najít x_1, pro které je zbytek řady tak velký, jak budeme chtít. Tím však ještě nejsme hotovi: Musíme ještě ukázat, že prvních n sčítanců řady se nemůže zrušit se součtem zbytku. Proto potřebujeme shora odhadnout shora výraz

$$\Big| \sum_{k=0}^{n-1} a^k \,\frac{\cos(b^k\pi x) - \cos(b^k\pi x_0)}{x - x_0} \Big| .$$

Z Lagrangeovy věty o přírůstku plyne existence x_2, ležícího mezi body x_0 a x_1, pro něž

$$\frac{\cos(b^k\pi x) - \cos(b^k\pi x_0)}{x - x_0} = -b^k\pi \sin(b^k\pi x_2) ,$$

takže lze vyšetřovaný součet odhadnout absolutní hodnotu každého jeho členu hodnotou $b^k\pi$, z čehož dostaneme

$$\Big| \sum_{k=0}^{n-1} a^k \,\frac{\cos(b^k\pi x) - \cos(b^k\pi x_0)}{x - x_0} \Big| \le \sum_{k=0}^{n-1} (ab)^k\pi = \pi\frac{(ab)^n - 1}{ab - 1} < \pi\frac{(ab)^n}{ab - 1} .$$

Jestliže zvolíme ab tak, aby $\pi/(ab-1) < 2/3$, neboli platí-li $ab > 1 + 3\pi/2$, pak

$$\Big|\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\Big| = \Big| \frac{1}{x_1 - x_0} \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left[\cos(b^k\pi x) - \cos(b^k\pi x_0)\right] \Big| > (ab)^n \Big(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1}\Big) ,$$

a s ohledem na $ab > 1$ a možnost volby n odtud plyne potřebná neomezenost diferenčního podílu v okolí bodu x_0.

Závěr je vcelku jednoduchý: Při vhodné volbě parametrů je Weierstrassova funkce, definovaná jako součet *stejnoměrně konvergentní* trigonometrické řady, Fourierovou řadou. Přitom je Fourierovou řadou funkce, jejíž derivace neexistuje v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$. Počítat tedy Fourierův rozvoj derivace funkce derivováním její Fourierovy řady *bez dalších dodatečných předpokladů* je beznadějné. Je to zřejmě možné, ověříme-li např. (lokálně) stejnoměrnou konvergenci řady, obdržené derivováním „člen po členu“. Příklad, který následuje, je delší a nemálo technický, zařadíme ho tedy jako samostatnou část.

4.7 Riemannova sčítací metoda

Již dříve jsme se setkali s poznámkou, že A. N. Kolmogorov dokázal existenci funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada diverguje *ve všech bodech* $\mathbb{R}$. Ukázali jsme také, že podobný jev pro funkce z $\mathcal{C}(2\pi)$ má přirozené a jednoduché řešení: Cesàrovou sčítací metodou jsou jejich Fourierovy řady sčítatelné k f. Vzniká přirozená otázka, zda neexistuje sčítací metoda, která by pro funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ sčítala Fourierovou řadu funkce f k $f(x)$ pro nějaká $x \in \mathbb{R}$. Je překvapivé, že řešení tohoto problému poskytuje metoda, pocházející od B. Riemanna (1826 – 1866), která pochází asi z r. 1853. Je jí věnován následující výklad, který samozřejmě respektuje opět další vývoj. Vracíme se též k obecným trigonometrickým řadám a dokážeme několik tvrzení, které jsou samy o sobě velmi zajímavé. Tato část byla probrána pouze na prosemináři.

Na konci této části dokážeme tvrzení: *Fourierovu řadu funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ lze pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ sečíst Riemannovou metodu k $f(x)$.*

Před výkladem o Riemannově sčítací metodě zavedeme několik „symetrických“ pojmů. Řekneme, že funkce f definovaná v okolí bodu $x \in \mathbb{R}$ je *symetricky spojitá v bodě x*, jestliže

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x-h)) = 0 .$$

Snadno nahlédneme, že symetrická spojitost v bodě x nezávisí na hodnotě $f(x)$ a že ze spojitosti f v bodě x plyne i symetrická spojitost v tomto bodě, nikoli však obráceně.

Podobně pro f definovanou na okolí bodu x nazýváme *symetrickou derivací funkce f v bodě x* vlastní limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} ;$$

značíme ji $D^1 f(x)$. Pokud existuje $f'(x)$ existuje i $D^1 f(x)$ a jsou si rovny; symetrická derivace $D^1 f(x)$ však nezávisí na hodnotě $f'(x)$ a může existovat i v případě, že $f'(x)$ neexistuje. Pokud existují jednostranné derivace $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$, existuje i $D^1 f(x)$ a

$$D^1 f(x) = \frac{f'_+(x) + f'_-(x)}{2} \,.$$

Pro nás je důležitý pojem tzv. *Schwarzovy derivace* $D^2 f(x)$, což je druhá symetrická derivace funkce f v bodě x. Je definována jako (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \,.$$

Důležité je, že tento pojem zobecňuje „normální“ druhou derivaci $f''(x)$.

Lemma 4.7.1. *Pokud existuje (vlastní) $f''(x)$, existuje i $D^2 f(x)$ a jsou si rovny.*

Důkaz. Existuje-li $f''(x)$, existuje též f' v nějakém okolí bodu x. Označíme-li $\rho(h) = f(x+h) + f(x-h)$, je ρ definována na nějakém okolí bodu 0 a podle Cauchyho věty o přírůstku dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} &= \frac{\rho(h) - \rho(0)}{h^2} = \frac{\rho'(\theta h)}{2\cdot\theta h} = \\ &= \frac{f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h)}{2\cdot\theta h}\,;\end{aligned}$$

přitom $0 < \theta < 1$ a bod θh leží mezi body 0 a h. Limita posledního zlomku pro $h \to 0$ existuje a je rovna $D^1 f(x) = f''(x)$. □

Lemma 4.7.2. *Nechť $[a, b]$ je nedegenerovaný interval a nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Je-li $D^2 f(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, je f lineární funkce na $[a, b]$.*

Důkaz. Pro $\varepsilon > 0$ všechna $x \in [a, b]$ položme

$$\varphi_k(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \pm \varepsilon(x-a)(x-b)\,, \quad k = 1, 2,$$

a uvažujme nejprve případ $k = 1$, kde volíme v definici znaménko '+'. Dokážeme, že $\varphi_1 \le 0$. Pokud by pro nějaké $t \in (a, b)$ bylo $\rho_1(t) > 0$, nabyla by ρ_1 v nějakém bodě $x_0 \in (a, b)$ *kladného* maxima vzhledem k $[a, b]$ a pak

$$\frac{\varphi_1(x_0+h) + \varphi_1(x_0-h) - 2\varphi_1(x_0)}{h^2} \le 0$$

pro dostatečně malá $|h|$; odtud dostaneme $D^2\rho_1(x_0) \le 0$. Přímým výpočtem zjistíme, že $D^2\varphi_1(x) = D^2 f(x) + 2\varepsilon > 0$ a nalezený spor dává $\varphi_1 \le 0$. Odtud dostaneme

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le \varepsilon(x-a)(b-x) \le \varepsilon(b-a)^2\,.$$

Podobně pro φ_2. kde v definici je před ε znaménko '−', dokážeme, že $\varphi_2 \ge 0$ a s přihlédnutím k již nalezené nerovnosti dostaneme

$$\left| f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right| \le \varepsilon(b-a)^2\,,$$

takže výraz v absolutní hodnotě je identicky roven 0 a linearita f je dokázána. □

Standardní tvar trigonometrické řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{4.35}$$

lze při označení $\rho_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$, $k \in \mathbb{N}$, $\rho_0 = a_0/2$ a volbě α_k tak, aby platilo

$$a_k = \rho_k \cos \alpha_k\,, \quad b_k = \rho_k \sin \alpha_k\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

upravit na tvar

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k (\cos \alpha_k \cos kx + \sin \alpha_k \sin kx) = \\ &= \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \alpha_k) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos k(x + \beta_k)\,;\end{aligned}$$

v posledním součtu jsme položili $\beta_k = \alpha_k/k$. Tohoto tvaru využijeme v následujícím tvrzení:

Věta 4.7.3 (Cantor). *Nechť trigonometrická řada* (4.35) *konverguje na nedegenerovaném intervalu* $I = [\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$. *Potom*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0\,.$$

Poznámka 4.7.4. Jak později ukázal Lebesgue, lze v předpokladech nahradit interval I kladné délky libovolnou množinou kladné Lebesguevy míry. My nebudeme tak obecné tvrzení potřebovat. Budeme tak moci využít myšlenku původního Cantorova důkazu.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že posloupnost nezáporných čísel ρ_k *nekonverguje* k 0. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že nerovnost

$$\rho_k \ge \delta \tag{4.36}$$

je splněna pro nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$.

Označme $d = b - a$ a zvolme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo (4.36) a zároveň $kd > 2\pi$. Probíhá-li x interval $[\,a, b\,]$, proběhne $x - \beta_k$ rovněž interval délky d. Proto funkce $x \mapsto \cos k(x - \beta_k)$ nabude všech hodnot z intervalu $[\,-1, 1\,]$ a existuje nedegenerovaný uzavřený interval $I_1 \subset [\,a, b\,]$ tak, že $\cos k(x - \beta_k) \ge 1/2$ na I_1, a tedy

$$\rho_k \cos k(x - \beta_k) \ge \frac{\delta}{2}$$

pro všechna $x \in I_1$. Označíme $[a_1; b_1] = I_1$ a zvolené k symbolem k_1. Postupujeme analogicky dále a pro $d_1 = b_1 - a_1$ zvolíme $k > k_1$ tak, aby pro ně platilo (4.36) a $kd_1 > 2\pi$. To nám umožní sestrojit posloupnost do sebe zařazených intervalů I_m, v jejichž průniku existuje podle Cantorovy věty bod $\rho \in [a; b]$. Pak však

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{k_n} \cos k_n(\zeta - \beta_{k_n}) \ne 0$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos k(x - \beta_k)$ nekonverguje v bodě ζ, což je hledaný spor. ☐

Předpokládejme nyní, že existuje takové $M > 0$, že pro koeficienty trigonometrické řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{4.37}$$

platí $|a_k| \le M$, $|b_k| \le M$, $k \in \mathbb{N}$. Podmínka je zřejmě splněna např. pro Fourierovu řadu funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Jestliže řadu formálně dvakrát člen po členu zintegrujeme, dostaneme

$$\frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}\,.$$

Řada v předcházejícím vyjádření zřejmě konverguje absolutně a stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Položme pro $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}\,;$$

funkci F budeme nazývat *Riemannovou funkcí* trigonometrické řady (4.37).

Definice 4.7.5. Je-li F Riemannova funkce trigonometrické řady (4.37) a existuje-li Schwarzova derivace $D^2F(x_0)$, pak budeme říkat, že řada (4.37) je v bodě x_0 *Riemannovsky sčítatelná* k hodnotě $D^2F(x_0)$.

Věta 4.7.6 (Riemann). *Jestliže pro koeficienty trigonometrické řady* (4.37) *platí* $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$ *a řada v bodě* x_0 *konverguje k součtu* $s \in \mathbb{R}$*, potom je řada* (4.37) *v bodě* x_0 *sčítatelná Riemannovou metodou rovněž k součtu* s*.*

Důkaz. Jestliže použijeme elementární úpravy, dospějeme snadno po jisté námaze k rovnosti

$$\frac{F(x_0+2h)+F(x_0-2h)-2F(x_0)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 .$$

Označíme-li nyní zkráceně

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx , \quad k \in \mathbb{N},$$

stačí ukázat, že z konvergence

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = s$$

vyplývá

$$\lim_{h\to 0}\Big(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2\Big) = s .$$

Z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro zbytek $\mathbb{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k$ je $|\mathbb{R}_n| < \varepsilon$. Jakmile $n \geq m$, plyne ze vztahu

$$\lim_{h\to 0}\Big(frac \sin kh kh\Big) = 1$$

existence $\delta > 0$, pro něž

$$\Big| A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - \sum_{k=0}^{m} A_k \Big| < \varepsilon ,$$

jakmile $|h| < \delta$. Protože je též

$$\Big| \sum_{k=0}^{m} A_k - s \Big| = |\, R_m \,| < \varepsilon$$

a platí

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2, \qquad (4.38)$$

vyplývá odtud

$$\Big| A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - s \Big| < 2\varepsilon$$

a stačí tedy ukázat, že poslední součet v (4.38) je „libovolně malý“ pro dostatečně malé $|h|$. Platí

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} (R_{k-1} - R_k)\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2$$

a pro libovolné h při $k \to \infty$ je

$$\lim_{k\to\infty} R_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 = 0\,,$$

takže pomocí Abelovy parciální sumace dostaneme

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 = R_m \frac{\sin(m+1)h}{(m+1)h} -$$
$$- \sum_{k=m+1}^{\infty} R_k \Big(\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - \Big(\sin(k+1)hk+1)h\Big)^2\Big)\,.$$

Odhadneme absolutní hodnotu výrazu

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k \Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2\Big| \le \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=m+1}^{\infty} \Big|\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin(k+1)h}{(k+1)h}\Big)^2\Big|\,;$$

stačí ukázat, že poslední součet lze odhadnout nezávisle na h, což provedeme takto:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \Big|\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - \Big(\sin(k+1)h(k+1)h\Big)^2\Big| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} \Big|\int_{kh}^{(k+1)h} \frac{d}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2 \,\mathrm{d}t\,\Big| \le$$
$$\le \int_{(m+1)h}^{\infty} \Big|\frac{d}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\Big|\,\mathrm{d}t \le \int_{0}^{\infty} \Big|\frac{d}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\Big|\,\mathrm{d}t\,.$$

Snadno vypočteme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2 = 2\,\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\,,$$

takže integrand je omezený v okolí bodu 0 a pro dostatečně velké t ho lze odhadnout shora funkcí $2(t+1)/t^3$. Z toho však již plyne dokazované tvrzení. $\square$

Riemannova sčítací metoda nám umožní dokázat zajímavou větu. Připomeňme již dříve zmíněný Kolmogorovův výsledek, podle něhož existuje funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$, jejíž Fourieova řada nekonverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že použití Riemannovy sčítací metody tento „nedostatek“ odstraní. Nejdříve však dokážeme zajímavou větu o jednoznačnosti.

Věta 4.7.7 (Cantor 1853). *Jestliže trigonometrická řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

konverguje k 0 *pro každé* $x \in \mathbb{R}$*, potom* $a_k = b_k = 0$.

Důkaz. Podle Cantorovy Věty 4.7.3 má uvažovaná řada stejně omezené koeficienty. Označme F její Riemannovu funkci. Podle předešlého tvrzení je $D^2F(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a F je lineární:

$$F(x) = Ax + B\,.$$

Zároveň však platí

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}\,,$$

takže po porovnání a úpravě máme

$$\frac{a_0}{4}x^2 + A_1 x + B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}\,.$$

Z periodicity součtu vpravo vyplývá, že $a_0 = A_1 = 0$, takže

$$B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}$$

a řada konverguje stejnoměrně, přičemž a_k/k^2, b_k/k^2 jsou Fourierovy koeficienty jejího součtu ($= B_1$). Z toho však již plyne $a_k = b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$; rovnost $a_0 = 0$ jsme již dokázali, čímž je důkaz tvrzení dokončen. □

Zajímavý výsledek poskytuje následující věta:

Věta 4.7.8. *Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a nechť*

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

Potom

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x$$

je 2π-periodická funkce, jejíž Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k funkci Φ. Fourierova řada funkce f je riemannovsky sčítatelná skoro všude v $\mathbb{R}$ k funkci f.

Důkaz. Funkce Φ je absolutně spojitá a má tedy konečnou derivaci na každém intervalu $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$. Dále je

$$\Phi(x + 2\pi) - \Phi(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t - \pi a_0 = 0\,,$$

takže Φ je 2π-periodická. Její Fourierova řada tedy podle Dirichlet-Jordanova kritéria konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Její koeficienty A_k, B_k snadno spočteme

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(t) \sin kt\,\mathrm{d}t =$$
$$-\frac{1}{\pi k}\Big[\Phi(x)\cos kx\Big]_{x=0}^{2\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi}\Big(f(t) - \frac{1}{2}\,a_0\Big)\cos kt\;dt = \frac{1}{k}a_k$$

a analogicky též $A_k = -b_k/k$. Vidíme tedy, že Fourierova řada funkce Φ je

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k}\,, \quad \text{kde} \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\,.$$

Její koeficienty lze tedy spočítat formální integrací Fourierovy řady f. Dále pro Riemannovu funkci F funkce f platí $F'(x) = \Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$ a jelikož je $\Phi'(x) = f(x)$ skoro všude v $\mathbb{R}$, je

$$D^2F(x) = \Phi'(x) = f(x) \quad \lambda - \text{s.v. v } \mathbb{R}\,.$$

□

4.8 Fourierova transformace

Jestliže má $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ konečnou variaci na každém $[a;b] \in \mathbb{R}$, pak $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

je omezená posloupnost, $c_k \to 0$ pro $|k| \to \infty$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} .$$

Nejjednodušší zobecnění tohoto vyjádření se týká periodicity: pro funkci $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ s lokálně konečnou variací platí

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx/l}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(t)\,\mathrm{e}^{-ikt/l}\,\mathrm{d}t\Big) .$$

Pokud v intuitivní rovině provedeme limitní přechod pro $l \to \infty$ a nahradíme součet integrálem, dostaneme vztah

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{e}^{-itv}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t\ ,$$

který má alespoň zdánlivě některé výhody: analogií $\widehat{f}(k)$ je nyní *funkce* $\widehat{f}$, vztah mezi f a $\widehat{f}$ je „symetričtější" a periodicity f jsme se zcela zbavili. Nic jsme *nedokázali*, ale tato úvaha nám poslouží jako vodítko pro další postup.

Je-li $f \in L_1(\mathbb{R}) = L_1$, pak lze definovat

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-itv}\,\mathrm{d}v\ , t \in \mathbb{R}\,,$$

protože integrál vpravo konverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Funkci $\widehat{f}$ budeme nazývat *Fourierovým obrazem* nebo *Fourierovou transformací* funkce f. Připomínáme, že stále ztotožňujeme f s třídou funkcí g měřitelných na $\mathbb{R}$, pro něž $f = g$ skoro všude na $\mathbb{R}$, tj. s prvky prostoru L_1. Zobrazení $f \to \widehat{f}$ také nazýváme *Fourierova transformace*. Všimneme si nejprve jeho základních vlastností.

Tyto vlastnosti jsou důsledkem translační invariance Lebesgueovy míry a toho, že (komplexní) exponenciála vyhovuje funkcionální rovnici

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\cdot\varphi(t)\,, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Využíváme také poznatků z teorie míry a integrálu. Výklad v jiných učebnicích se může nepodstatně lišit např. v tom, jak naložíme s faktorem $1/2\pi$, tyto odlišnosti však nejsou podstatné.

Připomeňme, že pracujeme s normou

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\ , \quad 1 \le p < \infty\,,$$

a že konvoluce funkcí $f, g \in L_1$ je definována vzorcem

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\,.$$

Základní vlastnosti Fourierovy transformace popisuje tvrzení:

Věta 4.8.1 (vlastnosti Fourierovy transformace). *Nechť $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}, f \in L_1$. Potom platí:*

(a) *Je-li $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t-\alpha)$.*

(b) *Je-li $g(x) = f(x-\alpha)$, pak $g(t) = f(t)e^{-i\alpha t}$.*

(c) *Je-li $g \in L_1$ a $h = f*g$, pak $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\cdot\widehat{g}(t)$*

(d) *Je-li $g(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.*

(e) *Je-li* $g(x) = f(x/\lambda)$, $\lambda > 0$, *pak* $\widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.

(f) *Je-li* $g(x) = -ixf(x) \in L_1$, *potom* $\widehat{f}$ *má derivaci a* $\widehat{g}(t) = \big(\widehat{f}\,\big)'(t)$.

Důkaz. Většinu z uvedených vlastností lze ověřit triviálním výpočtem. Ukážeme si to na dvou méně zřejmých z nich: užitím Fubiniovy věty dostaneme v (c)

$$\begin{aligned}\widehat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-itv}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(v-u)g(u)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}v = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\mathrm{e}^{-itu}\,\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} f(v-u)\mathrm{e}^{-it(v-u)}\,\mathrm{d}v = \widehat{g}(t)\cdot\widehat{f}(t)\,.\end{aligned}$$

Podobně pro $s \neq t$ dostaneme v (f) dosazením

$$\frac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(t)}{s-t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-itv}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-i(s-t)v} - 1}{s-t}\Big)\,\mathrm{d}v\ .$$

Pro $u \neq 0$ dostaneme elementárními úpravami odhad

$$\Big|\,\frac{\mathrm{e}^{-ivu} - 1}{u}\,\Big| \le \frac{|\cos vu - i\sin vu - 1|}{|u|} \le |v|\,.$$

Z něj a z předpokladů plyne možnost použít Lebesguevovu větu o dominované konvergenci a dostat tak limitním přechodem pro $s \to t$

$$\big(\widehat{f}\,\big)'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} ivf(v)\mathrm{e}^{-itv}\,\mathrm{d}v = \widehat{-itf(t)}$$

□

Využijeme-li vlastnost (b) z Věty 4.8.1, dostaneme jako Fourierův obraz funkce

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

funkci

$$\widehat{f}(t)\frac{\mathrm{e}^{i\alpha t} - 1}{\alpha}\,.$$

To nás přivádí na myšlenku, že bychom jako Fourierův obraz f' mohli obdržet funkci $it\widehat{f}(t)$. Pro funkci f, pro kterou $f, f' \in L_1$ a f je primitivní funkcí k f', dostaneme tento vztah pomocí *metody per-partes*

$$\begin{aligned}\big(\widehat{f'}\big)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(v)\mathrm{e}^{-itv}\,\mathrm{d}v = \\ &= f(t)\mathrm{e}^{-itv}\Big|_{t=-\infty}^{\infty} + it\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-itv}\,\mathrm{d}v = it\widehat{f}(t)\,.\end{aligned} \tag{4.39}$$

V dalším využijeme následující lemma:

Lemma 4.8.2. *Označíme-li pro funkci* f *a* $y \in \mathbb{R}$

$$f_y(x) = f(x-y)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

pak pro $f \in L_p$ *je zobrazení* $y \mapsto f_y$ *stejnoměrně spojité zobrazení* $\mathbb{R}$ *do* L_p.

Důkaz. Z teorie Lebesgueova integrálu je známo, že k funkci f a číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt spojitou funkci g s nosičem v intervalu $[-a, a]$, $a > 0$, tak, že $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Ze stejnoměrné spojitosti g na $\mathbb{R}$ dostaneme pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ takové $\delta_\varepsilon = \delta$, pro něž

$$|s-t| < \delta \Rightarrow |g(s) - g(t)| < (3a)^{-1/p}\varepsilon\,.$$

Odtud plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-s) - g(x-t)|^p \,\mathrm{d}x \le (3a)^{-1}\varepsilon^p(2a+\delta) < \varepsilon^p ,$$

a tedy i $\|g_s - g_t\|_p < \varepsilon$. Dále je

$$\|f_s - f_t\|_p \le \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p < 3\varepsilon ,$$

což již dává dokazované tvrzení. □

Přímo z definice Fourierovy transformace dostaneme odhad

$$|\widehat{f}(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)\mathrm{e}^{-itv}| \,\mathrm{d}v \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| \,\mathrm{d}v = \|f\|_1 .$$

Méně je již zřejmé následující tvrzení:

Věta 4.8.3. *Fourierova transformace zobrazuje prostor L_1 do prostoru $\mathcal{C}_0$ všech funkcí g spojitých na $\mathbb{R}$, pro něž je*

$$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0 .$$

Důkaz. Snadno nahlédneme, že

$$|\widehat{f}(t_n) - \widehat{f}(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| \Big| \mathrm{e}^{-it_n v} - e^{-itv} \Big| \,\mathrm{d}v .$$

Integrand vpravo je majorizován funkcí $2|f|$ a pro každé $v \in \mathbb{R}$ konverguje k 0 pro $t_n \to t$. Pomocí Lebesgueovy věty o dominované konvergenci plyne odtud spojitost funkce $\widehat{f}$. Z definice

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-itv} \,\mathrm{d}v \tag{4.40}$$

a ze vztahu $\mathrm{e}^{\pi i} = -1$ snadno obdržíme obdobně jako v důkazu Tvrzení 4.5.4

$$\widehat{f}(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-it(v+\pi/t)} \,\mathrm{d}v = -\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(v - \frac{\pi}{t}\Big)\mathrm{e}^{-itv} \,\mathrm{d}v . \tag{4.41}$$

Sečtením (4.40) s (4.41) dostaneme

$$2\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(v) - f\Big(v - \frac{\pi}{t}\Big)\Big)\mathrm{e}^{-itv} \,\mathrm{d}v ,$$

z čehož již snadno vyplývá

$$2\big|\widehat{f}(t)\big| \le \|f - f_{\pi/t}\|_1 \to 0$$

pro $t \to \pm\infty$. Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 4.8.4 (důležitý). Připomeňme si vztah z Věty 4.8.1 (f) a dále rovnost (4.39), která platí v případě $f' \in L_1$:

$$\big(\widehat{f}\,\big)'(t) = \widehat{-itf(t)}, \qquad \widehat{(f')}(t) = it\widehat{f}(t) .$$

Využijeme je pro určení Fourierova obrazu funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě je $f'(x) = -2xf(x) = 2i \cdot ixf(x)$, z čehož plyne

$$\widehat{f'}(t) = 2i \cdot \widehat{itf(t)} .$$

Z této rovnosti dostaneme

$$it\widehat{f}(t) = -2i(\widehat{f})'(t)\,,$$

takže $\widehat{f}$ je řešením jednoduché diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x}{2}y\,.$$

Obecné řešení této rovnice je tvaru $y = C\mathrm{e}^{-x^2/4}$. Je tedy

$$\widehat{f}(t) = C\mathrm{e}^{-t^2/4} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-v^2} e^{-itv}\,\mathrm{d}v\ ,$$

z čehož dostaneme $C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$. Z nalezeného vzorce dostaneme podle Věty 4.8.1, (c)

$$\widehat{\mathrm{e}^{-x^2/a}} = \sqrt{\pi a} e^{-at^2/4}$$

a volbou $a = 2$ dospějeme k funkci $f(x) = e^{-x^2/2}$, pro kterou platí $\widehat{f} = \sqrt{2\pi}\cdot f$.

4.9 Inverzní Fourierova transformace

Všimneme si krátce *inverzní Fourierovy transformace* $\widehat{f} \longmapsto f$. Zde je třeba si uvědomit, že pro $f \in L_1$ je sice $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0$, avšak obecně neplatí $\widehat{f} \in L_1$. Pokud bychom chtěli postupovat při hledání inverzního zobrazení mechanicky a použili úvodní intuitivní úvahy, dostaneme se do obtíží:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-itv}\,\mathrm{d}v = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-v)t}dt\end{aligned}$$

nedává dobrý smysl, protože poslední z integrálů neexistuje. Musíme tedy postupovat opatrněji.

Snadno spočteme, že pro $f, g \in L_1$ je

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)g(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-itv}dv\Big)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-ivt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\widehat{g}(v)dv\,.\end{aligned}$$

Nyní za g zvolíme $e^{ixt}g(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tak dostaneme pomocí Věty 4.8.1, (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)g(t)\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\widehat{g}(v-x)dv\,.$$

Opět užijeme Větu 4.8.1 a dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\mathrm{e}^{ixt}g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\widehat{g}(x-v)\,\mathrm{d}v\ .$$

Konečně užitím Věty 4.8.1 dostaneme pro $g(t) = \varPhi(at)$ vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\mathrm{e}^{ixt}\varPhi(-at)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\frac{1}{a}\widehat{\varPhi}\Big(\frac{x-v}{a}\Big)\,\mathrm{d}v\ .$$

Zbytek úvahy, vedoucí k inverzní Fourierově transformaci, spočívá v šikovné volbě funkce $\varPhi$. Budeme ji volit s co „nejhezčími“ vlastnostmi:

$$\varPhi \in L_1\,,\ \varPhi \text{ spojitá a omezená}\ ,\ \varPhi(0) = 1\,,\ \widehat{\varPhi} \in L_1. \tag{4.42}$$

Takové funkce existují, jednu z nich jsme nalezli v Příkladu 4.34. Tak dostaneme nejprve v obecném tvaru tvrzení:

Věta 4.9.1. *Nechť funkce Φ vyhovuje podmínkám* (4.42)*. Předpokládejme dále, že $f \in L_1$. Potom pro $a \to 0$ platí*

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Big| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{ixt} \Phi(-at)\, \mathrm{d}t \Big| \, \mathrm{d}x = 0\,,$$

tj. funkce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{ixt} \Phi(-at) dt = (f * \widehat{\Phi}_a)(x)$$

konverguje pro $a \to 0$ v normě $\|\cdot\|_1$ k funkci f. Zde $\widehat{\Phi}_a(x) = \dfrac{1}{a}\, \widehat{\Phi}\Big(\dfrac{x}{a}\Big)$.

Nežli přistoupíme k důkazu tohoto tvrzení, připomeneme úvahu, kterou jsme dělali v souvislosti s Weierstrassovou větou o aproximaci. Rozšíříme-li např. funkci $f \in \mathcal{C}([a,b])$ spojitě se zachováním označení f na celou reálnou osu $\mathbb{R}$ tak, aby byla množina $\{x \in \mathbb{R}\,; |f(x)| > 0\}$ omezená (funkcím s touto vlastností se často říká *spojité funkce s kompaktním nosičem*; tyto funkce tvoří lineární prostor $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$) a chápeme-li konvoluci $f * \Phi$ funkce f s jádrem Φ, tj.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Phi(x-t)\, \mathrm{d}t$$

jako zobrazení do $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$, je přirozené se ptát, zda existuje takové jádro Φ, pro které by toto zobrazení bylo identitou na $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$. Prozradíme, že odpověď je negativní, avšak lze nalézt taková jádra Φ_k, pro která platí $f * \Phi_k \to f$ pro $k \to \infty$. S podobnou problematikou jsme se setkali již vícekrát (připomeňme podobnost s problematikou funkcí z $\mathcal{C}(2\pi)$ a Fejérovými jádry K_n), proto si jí všimneme za poněkud obecnějších předpokladů podrobněji.

Věta 4.9.2. *Nechť Φ_k je posloupnost funkcí z L_1, taková, že*

(a) $\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(t)\, \mathrm{d}t = c$ *existuje*;

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(t)|\, \mathrm{d}t \le M < \infty$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$;

(c) *pro všechna $\delta > 0$ je*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\{t\,;\,|t| \ge \delta\}} |\Phi_k(t)|\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Potom pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \| f * \Phi_k - cf \| = 0\,, \tag{4.43}$$

kde $\|\cdot\|$ je supremová norma na $\mathbb{R}$. Analogické tvrzení platí pro konvergenci v L_p, tj. pro každou funkci $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, je

$$\lim_{k\to\infty} \| f * \Phi_k - cf \|_p = 0\,. \tag{4.44}$$

Důkaz. Označme $c_k := \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(t) dt$. Následující úvaha se často provádí v souvislosti s Weierstrassovou větou; srv. s Landauovým důkazem této věty v [69], s. 406. Zřejmě

$$(f * \Phi_k)(x) - c_k f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x))\, \Phi_k(y)\, \mathrm{d}y\ .$$

Funkce $f \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ je na $\mathbb{R}$ omezená a stejnoměrně spojitá, takže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, pro které z $|x-y| < \delta$ vyplývá $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Platí

$$\|f * \Phi_k - c_k f\| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(x-y) - f(x)\,| \cdot |\,\Phi_k(y)|\, \mathrm{d}y\ . \tag{4.45}$$

Integrál v předcházejícím odhadu rozdělíme na integrály přes množiny

$$A := \{y \in \mathbb{R}\,;\, |y| < \delta\}\,, \quad B := \{y \in \mathbb{R}\,;\, |y| \geq \delta\}\,.$$

První z absolutních hodnot v integrandu v (4.45) je na A odhadnuta číslem ε a na B hodnotou $2\|f\|$. Odtud dostaneme $\|\, f * \Phi_k - c_k f \,\| \to 0$. Konečně (4.43) je důsledkem nerovnosti $\|\, f * \Phi_k - cf \,\| \leq \|\, f * \Phi_k - c_k f \,\| + |c - c_k| \cdot \|f\|$.

K důkazu (4.44) použijeme toho, že prostor $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ je hustým podprostorem prostoru L_p pro všechna $1 \leq p < \infty$. Je-li dána funkce $f \in L_p$ a zvolíme-li $\varepsilon > 0$, nalezneme nejprve $g \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ tak, že $\|\, f - g \,\|_p < \varepsilon$. Potom

$$\|\, f * \Phi_k - g * \Phi_k \,\|_p \leq \varepsilon \, \|\Phi_k\|_1 \leq M\varepsilon$$

nezávisle na $k \in \mathbb{N}$. Zvolíme ještě interval $[\,a, b\,]$ tak, že g se anuluje všude mimo tento interval. Pak volbou $n \in \mathbb{N}$ lze dosáhnout toho, že pro všechna $k \geq n$ je

$$\|\, g * \Phi_k - g\|_\infty \leq \varepsilon\,,$$

z čehož dostaneme

$$\|\, g * \Phi_k - g\|_p \leq \varepsilon(b - a)\,.$$

Pokud nyní použijeme odvozených dílčích odhadů, pak pro všechna $k \geq n$ je

$$\begin{aligned} \|\, f * \Phi_k - f \,\|_p &\leq \|\, f * \Phi_k - g * \Phi_k \,\|_p + \|\, g * \Phi_k - g \,\|_p + \|\, g - f \,\|_p \leq \\ &\leq \varepsilon\, M + \varepsilon\, (b - a) + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

z čehož už snadno plyne (4.44). □

Důkaz Věty 4.9.1. Podle předcházejícího lemmatu dostáváme

$$f * \widehat{\Phi}_a \to cf$$

v L_1, kde $c = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Phi}(t)dt$. Zbývá dokázat, že toto c nezávisí na volbě Φ, což provedeme v průběhu důkazu následujícího tvrzení: □

Věta 4.9.3. *Nechť $f \in L_1$ a také $\widehat{f} \in L_1$. Potom f je skoro všude rovna spojité funkci. Předpokládejme tedy, že f je spojitá. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{ixt} \, \mathrm{d}t\,.$$

Důkaz. Z Věty ... a z Lebesgueovy věty o dominované konvergenci (f je omezená a spojitá) dostaneme

$$\lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{ixt} \Phi(-at) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{ixt} \, \mathrm{d}t$$

(je $\Phi(0) = 1$). Pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$cf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}t\,.$$

Odtud ale vidíme, že ve skutečnosti c nezávisí na konkrétní volbě Φ. Položíme-li

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}t\,,$$

dostáváme $F(x) = (1/2\pi) \cdot \widehat{\widehat{f}}(-x)$ a přitom $F = f$ skoro všude v $\mathbb{R}$, což dává tvrzení věty. □

Důsledek 4.9.4. *Je-li $f \in L_1$ a $\widehat{f} \equiv 0$, potom $f = 0$ s.v. v $\mathbb{R}$.*

Literatura

[1] Ash J. M. (ed.): *Studies in harmonic analysis,* Proceedings of the Conference "A survey of harmonic analysis" held at DePaul University, Chicago, Ill., June 29–July 2, 1974, MAA Studies in Mathematics **13**, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976.

[2] Banach S., Steinhaus H.: *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fund. Math. **9** (1927), s. 50–61.

[3] Bachman G., Narici L., Beckenstein E.: *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, New York, 2000.

[4] Bari N. K.: *Trigonometričeskije rjady*, GIFML, Moskva, 1961.

[5] Bauer H.: *Aproximace a abstraktní hranice*, Pokroky mat. fyz. astronom. **26** (1981), s. 305 – 326.

[6] Bečvař J., Fuchs E. (ed.): *Historie matematiky I*, JČMF, Brno, 1994, (sborník semináře Historie matematiky, Jevíčko 1993).

[7] Bernštejn N. S.: *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Comm. Soc. Math. Kharkov Society **13** (1912), s. 1 – 2.

[8] Bohman H.: *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Math. **2** (1952), s. 43 – 56.

[9] Borel É.: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, Gauthier–Villars, Paris, 1905.

[10] Bottazzini U.: *The higher calculus: Real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, New York, 1986.

[11] Bressoud D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[12] Burkhardt H.: *Trigonometrische Reihen und Integrale*, obsaženo v : *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. II A 12*, Teubner, Leipzig, 1904.

[13] Cantor G.: *Beweis, das eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*, J. Reine Angew. Math. **72** (1870), s. 139 – 142,

[14] Cauchy A.: *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnic* (1921), obsaženo v : *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (1882 – 1974), Paris,

[15] Cesáro E.: *Sur la multiplication des séries*, Bull. Sci. Math. **14** (1890), s. 114 – ???.

[16] Coppel W. A.: *J. B. Fourier – On the occasion of his two hundredth birthday*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), s. 468 – 483.

[17] Dauben J. W.: *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, Harward Univ. Press, Cambridge, MA, 1979.

[18] Dirichlet P. G. L.: *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données*, obsaženo v : *Werke 1*, , Berlin, s. 117 – 132, Journal reine angew. Math. 1829.

[19] Edwards R.: *Fourier series – a modern introduction*, Springer, New York, 1979. (Existuje ruský překlad: *Rjady Fur'je v sovremennom izloženii*, Mir, Moskva 1985).

[20] Edwards C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[21] Euler L.: *Institutiones Calculi diferentialis*, ??, Petropavlovsk, 1755.

[22] Feinerman R. P., Newman D. J.: *Polynomial approximation*, William & Wilkins, Baltimore, 1974.

[23] Fejér L.: *Untersuchungen über Fourierische Reihen*, Math. Ann. **58** (1904), s. 51 – 69,

[24] Fourier J. B. J.: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (nepublikováno), pro *Institute de France*, Paris, podáno 21. prosince 1807.

[25] Fourier J. B. J.: *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, revidovaná verze *Mémoiru* (1807) přihlášená do soutěže o *Grand prix de mathématique* pro r. 1812; byla podána r. 1811, Paris, 1824.

[26] Fourier J. B. J.: *Théorie analytique de la chaleur*, Didot, Paris, 1822.

[27] Goffman C., Pedrik G.: *First course in functional analysis*, Prentice Hall International, Inc., London, 1965.

[28] Hardy G. H.: *Divergent series*, Oxford University Press, New York, 1956.

[29] Hawkins T.: *Lebesgue's Theory of integration. Its origins and development*, University of Wisconsin Press, Madison, 1970.

[30] Heine E.: *Über trigonometrischen Reihen*, J. Reine Angew. Math. **71** (1870), s. 353 – 365,

[31] Hölder O.: *Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze*, Math. Ann. **20** (1882), s. 535 – ???,

[32] Chernoff P. R.: *Pointwise convergence of Fourier series*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), s. 399–400.

[33] Cheney E. W.: *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1966.

[34] Jackson D.: *The convergence of Fourier series*, Amer. Math. Monthly **41** (1934), s. 67–84.

[35] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1953, 1956, 1976.

[36] Jones F.: *Lebesgue integration on Euclidean space*, Jones and Barlett Pub., Boston, 1993.

[37] Kahane J-P.: *Baire's category theorem and trigonometric series*, Journal d'Analyse mathématique **(80)**, 2000. s. 143–182,

[38] Kahane J-P., Lemarié-Rieusset P-G.: *Fourier series and wavelets*, Gordon and Breach Pub., 1995.

[39] Katz V. J.: *The calculus of trigonometric functions*, Historia Math. **14** (1987), s. 311–324.

[40] Kline M.: *Mathematical thoughts from ancient to modern time*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1990.

[41] Korovkin P. P.: *O schodimosti linějnych položitělnych operatorov v prostranstve němpreryvnych funkcij*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **90** (1953), s. 961 – 964.

[42] Korovkin P. P.: *Linějnyje operatory i těorija približenija*, Fizmatgiz, Moscow, 1959, (angl. překlad: Linear operators and approximation theory, Gordon and Breach, New York, 1960).

[43] Körner T. W.: *Fourier analysis*, Cambridge Univerity Press, Cambridge, 1988, (další vydání 1990, 1992).

[44] Kroll W.: *Zwei Perlen der elementaren Analysis*, Praxis der Mathematik **37** (1995), s. 109 – 115.

[45] Kufner A.: *Geometrie Hilbertova prostoru*, SNTL, Praha, 1973.

[46] Kufner A., Kadlec J.: *Fourierovy řady*, Academia, Praha, 1969.

[47] Lasser R.: *Introduction to Fourier series*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[48] Lebesgue H.: *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sci. Math. (2. sér.) **22** (1898), s. 278 – 287.

[49] Lebesgue H.: *Intégrale, longuer, aire* (Thèse), Annali Mat. Pura e Appl. **(3) 7** (1902), s. 231 – 259.

[50] Lebesgue H.: *Sur les séries trigonométriques*, Ann. scient. l'École norm. **(3) 20** (1903), s. 453 – 485,

[51] Laugwitz D.: *Bernhard Riemann, 1826 – 1866: turning points in the conception of mathematics*, Birkhäuser Boston, Boston, 1996, 1999. (Kniha vyšla původně v němčině r. 1966.).

[52] Lerch M.: *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel*, Acta Math. **27** (1903), s. 339 – 351.

[53] Lomelí H. E., García C. L.: *Variations on a Theorem of Korovkin*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), s. 744 – 750.

[54] Luzin N.: *Function: Part I and II*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), s. 59 – 67, 263 – 270.

[55] Natanson I. P.: *Těorija funkcij dějstvitělnoj peremennoj*, GITTL, Moskva, 1953.

[56] von Neumann J.: *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Göttingen Nachr. (1927), s. 1-57.

[57] Paplauskas A. B.: *Trigonometričeskije rjady*, Nauka, Moskva, 1966.

[58] Picard E.: *Sur la représentation approchée des fonctions*, C. R. Heb. Séances Acad. Sci. Paris **112** (1891), s. 183–186.

[59] Pinkus A.: *Weierstrass and approximation theory*, J. Approx. Theory **107** (2000), s. 1–66.

[60] Riemann B.: *Gesammelte mathematische Werke* (2 Aufl.), Leipzig, 1892.

[61] Riemann B.: *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe,* Gesammelte Werke, Göttingen, **13** (1867), (47 str., Göttingenský bibliografický server).

[62] Rudin W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977,.

[63] Runge C.: *Über die Darstellung willkürlicher Funktionen* (*Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler*), Acta Math. **7** (1885), s. 387–392. (navazuje na článek téhož autora z Acta Math. **6**.).

[64] Stromberg K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[65] Struik D. J.: *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963, (existuje v angličtině, v ruštině a v němčině).

[66] Siegmund-Schultze R.: *Der Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes 1885 vor dem Hintergrund der Entwicklung der Fourieranalysis*, Hist. Math. **15** (1988), s. 299–310.

[67] Štěpánek F.: *130 let divergentních trigonometrických Fourierových řad*, Pokroky MFA **49** (2004), s. 53–60, 122 – 128.

[68] Taylor A. E.: *Differentiation of Fourier series and integrals*, Amer. Math. Monthly **51** (1944), s. 19–25.

[69] Veselý J.: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 2001.

[70] Veselý J.: *Weierstrassova věta o aproximaci*, Pokroky MFA **47** (2002), s. 181–190.

[71] Weierstrass K.: *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen* (*Gelesen Akad. Wiss. 18. Juli 1872*), Berlin, 1872. (Na základě Weierstrassova dopisu publikoval r. 1875 tento příklad P. D. Du Bois-Reymond).).

[72] Weierstrass K.: *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente* (*původně v Sitzungberichte Königl. Akad. Wiss., 633 – 639, 789 – 805*), Mathematische Werke von Karl Weierstrass Mayer & Müller, Berlin, 1903. s. 1 – 37,

[73] Weiss G. L.: *Harmonic Analysis*, MAA, ??, ??.

[74] Wiener N.: *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge University Press, New York, 1933. (Existuje ruský překlad: *Intěgral Furje i někotoryje jego priloženija*, GIFML, Moskva 1963.).

[75] Zygmund A.: *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1959. (Existuje ruský překlad: *Trigonometričeskije rjady*, Mir, Moskva 1965.).

[76] Zygmund A.: *Notes on the history of Fourier series*, obsaženo v : *Studies in Harmonic Analysis, MAA Studies in Mathematics*, **13** MAA, Washington, (1976), s. 1 – 19.